Vous offre

LA PECHE AUX MOdULES IG1 AVEC presque TOUS LES CORRIGES

Edition 1999-2000



Sommaire

UV Mathématiques

MA11 **p 4**
PS11 **p 31**
AD11 **p 34**

UV Gestion

EC11 **p 42**
GF11 **p 45**
DR11 **p 48**

UV Electronique

QCM **p 50**
SF11 **p 53**

UV Réseau

FA11 **p 69**
IT11 **p 58**
TI11 **p 65**

UV Signal

TS11 (premier contrôle)
TS11 (deuxième contrôle)

UV Informatique

IF11
IF12
AM11

© Adeline

UV Mathématiques

Module : Mathématiques appliquées (MA11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Fascicules de cours

Sujet

Question 1

1. Soit a et b deux nombres réels, tels que a>1 et b>2. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème des résidus :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{Cos(x)}{a + Cos(x)} dx$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b + Cos(x) + Sin(x)}$$

2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $n \in N^*$. Calculer les intégrales

$I_k = \int_0^{\infty} x^{-\alpha} F_k(x) dx$, k=1,2

Où $F_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ et $F_2(x) = \frac{1}{(x+1)^n}$

en utilisant le théorème des résidus et montrer que :

$$I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{Sin(\frac{\pi(\alpha+1)}{4})}{Cos(\frac{\alpha\pi}{4})Cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$

$I_2 = \frac{\pi}{Sin(\pi\alpha)}$ pour n=1

$I_2 = \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{1}{Sin(\pi\alpha)} \prod_{k=0}^{n-2} (\alpha + k)$ pour n≥2

Question 2

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré intégrable, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx$$

On considère l'opérateur U défini par $(Uf)(x) = \begin{cases} f(x-1) & pour\ x > 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

2. Montrer que U est une isométrie.
3. Quel est l'adjoint U* de U ? Calculer l'opérateur U*U.
4. Soit V = UU*. Montrer que V est auto-adjoint et calculer V², puis V_n. Conclusion ?
5. Calculer Vf = UU*f pour f ∈ E

Corrigé

Question 1

1. $I = \int_0^{2\pi} \frac{Cos(x)}{a + Cos(x)} dx = \int_0^{2\pi} dx - \int_0^{2\pi} \frac{a}{a + Cos(x)} dx$

Comme $\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$

Et on voit p.62 du Tome 1 de Mathématiques appliquées que $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + Cos(x)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$

On a donc $I = 2\pi(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}})$

$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b + Cos(x) + Sin(x)}$

C'est une intégrale de 1er type (p.61 du poly)

Donc on pose $z = e^{ix}$ et on obtient $J = -2i \int_{\gamma} \frac{dz}{(1-i)z^2 + 2bz + i + 1}$

Les deux solutions de $(1-i)z^2 + 2bz + i + 1$ sont :

$z_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 2}) \frac{1}{1-i}$ et $z_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 2}) \frac{1}{1-i}$

Or $z_1 \in \gamma$ et $z_2 \notin \gamma$, on a donc

$J = -2i 2\pi i Res(f(z), z_1) = 4\pi \frac{1}{(1-i)(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 2}}$

2. $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{(x+1)(x^2+1)} dx$

C'est une intégrale de type 7 (poly p.85)

On a donc $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum Resf$

Donc $(1-e^{2i\pi\alpha})I_1 = 2i\pi\sum Res(\frac{x^{-\alpha}}{(x+1)(x^2+1)})$

f a 3 pôles simples

$x=-1 \quad \rightarrow \quad Res(f,-1)=\frac{e^{-i\alpha\pi}}{2}$

$x=i \quad \rightarrow \quad Res(f,i)=\frac{e^{-i\alpha\pi/2}}{2(i-1)}$

$x=-i \quad \rightarrow \quad Res(f,-i)=\frac{e^{-3i\alpha\pi/2}}{-2(i+1)}$

On obtient donc

$(1-e^{-2i\pi\alpha})I_1 = i\pi(e^{-i\alpha\pi}+\frac{e^{-i\alpha\pi/2}}{i-1}-\frac{e^{-3i\alpha\pi/2}}{i+1})$

donc

$I_1 = \frac{i\pi}{e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi}}(1+Sin(\frac{\alpha\pi}{2})-Cos(\frac{\alpha\pi}{2}))$

ce qui après tout plein de simplifications donne

$I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{Sin(\frac{\pi(\alpha+1)}{4})}{Cos(\frac{\alpha\pi}{4})Cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$

$I_2 = \int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}}{(x+1)^n}dx$

C'est aussi une intégrale du 7ème type, donc on refait pareil

f a 1 pôle d'ordre n

$x=-1 \quad \rightarrow \quad Res(f,-1)=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}((z+1)^n f(z)}{dz^{n-1}}\right)_{z=-1}=\frac{-1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}(\alpha+k)(-1)^{-\alpha-n+1}$

donc

$I_2 = \frac{2i\pi}{(n-1)!}\frac{1}{(1-e^{-2i\pi\alpha})}\prod_{k=0}^{n-2}(-\alpha-k)(-1)^{\alpha-n+1}$

$I_2 = \frac{2i\pi}{(n-1)!}\frac{e^{(\alpha-n+1)i\pi}}{(1-e^{-2i\pi\alpha})}\prod_{k=0}^{n-2}(-\alpha-k)$

$I_2 = \frac{\pi}{(n-1)!}\frac{e^{(-n+1)i\pi}}{Sin\alpha\pi}\prod_{k=0}^{n-2}(-\alpha-k)$

$I_2 = \frac{\pi}{(n-1)!}\frac{1}{Sin\alpha\pi}\prod_{k=0}^{n-2}(\alpha+k)$ pour n ≥ 2

$I_2 = \frac{\pi}{Sin(\pi\alpha)}$ pour n=1

Question 2

2. Il faut montrer que $\|Uf\| = \|f\|$

Soit $f \in E$

$$(Uf)(x) = \begin{cases} f(x-1) & pour \quad x > 1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty f^2(x)dx = \int_1^\infty f^2(x-1)dx$$

donc $\forall f \in E \quad \|f\|^2 = \|Uf\|^2$

donc $\forall f \in E \quad \|f\| = \|Uf\|$

3. $\langle Uf, g\rangle = \int_0^\infty (Uf)(x)g(x)dx = \int_1^\infty f(x-1)g(x)dx = \int_0^\infty f(x)g(x+1)dx = \langle f, U^* g\rangle$

avec U^* défini de la manière suivante

$\forall x \geq 0, \quad (U^* f)(x) = f(x+1)$

$$U^*(Uf)(x) = \begin{cases} U^*(f(x-1)) & si\ x \geq 1 \\ U^*(0) & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si $x \geq 1 \quad U^*(f(x-1)) = f(x)$

Si $f = 1_{[-1;1]}$

Donc $\sum |a_n| r^n \leq |a_0| + \frac{2r}{R-r}(A - \mathrm{Re}(a_0))$

4. Comme $(AB)^* = B^* A^*$ on a $V^* = (UU^*)^* = (U^*)^* U^* = UU^*$

donc V est autoadjoint

$$Vf(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$VVf(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donc $V^2 = V$

donc $V^n = V$

Ainsi V étant continue (car U est une isométrie, donc $\|U\| = 1$), on a

V est une projection orthogonale sur V(E)

5. $UU^* f = f(x) \quad si\ x \geq 0$

d'où $f(x) = 0 \quad sur\ [0,1]$

Ainsi l'ensemble des solutions est : $\{f \in E \quad tq \quad f(x) = 0, \quad x \in [0,1]\}$

Module : Mathématiques appliquées (MA11)
Durée : 3h
Documents autorisés : Fascicules de cours

Sujet

Question 1 (/6)

Soient R∈ R_*^+, U = D(0,R) le disque de rayon R centré à l'origine,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

holomorphe dans U, P=Re(f) et Q=Im(f).

1. Pour $n\in N^*$ et r]0,R[, établir :

$$a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}P(re^{it})e^{-\mathrm{int}}dt=\frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}Q(re^{it})e^{-\mathrm{int}}dt$$

2. Dans cette question, on suppose $f(0)\in R$. Prouver que pour r∈]0,R[et z∈ D(0,R), on a

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(re^{it})\frac{r+ze^{-it}}{r-ze^{-it}}dt$$

3. Dans cette question, on suppose que $2a_0=1$, R≥ 1, P(z) ≥ 0 si |z|<1. Montrer que

$$\forall n\in N^*\left|a_n\right|\le 1$$

Question bonus

4. Soient A∈ R et r∈ [0,R[. On suppose que P(z)≤ A, $\forall z\in U$. Prouver que

$$\sum\left|a_n\right|r^n\le\left|a_0\right|+\frac{2r}{R-r}(A-\mathrm{Re}(a_0))$$

(On se ramènera au cas de la question 3. en utilisant $\alpha+\beta f(Rz)$

Question 2 (/6)

1. Soit l'application $f=1_{[-1;1]}$

1.a. Calculer sa transformée de Fourier, $\hat{f}$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{Sin(t)}{t}\right)^2dt$$

1.b. Déterminer une application $g\in L^1$ telle que

$$\hat{g}(t)=\left(\frac{Sin(t)}{t}\right)^2$$

Déduire la valeur des intégrales :

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{Sin(t)}{t}\right)^3dt \text{ et } I_4=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{Sin(t)}{t}\right)^4dt$$

2. Soit un réel a>0 et l'application $g_a : R \to R$ définie par $g_a(x) = \exp(-a|x|)$

2.a. Calculer sa transformée de Fourier, $\hat{g}_a$

2.b. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{a^2 + t^2} dt, \quad où\ x \in R$$

2.c. Déterminer les transformées de Fourier des applications h et φ définies sur R par :

$$h(x) = \frac{1}{5 - 6x + 9x^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi = g_a * g_b \text{, où b>0}$$

En déduire l'expression de $\varphi(x)$ dans le cas où a ≠ b

3. Evaluer l'intégrale $K = \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{Sin(t)}{t} dt$, où a>0

Question 3 (/4)

Soient p et q deux entiers positifs.

1. Montrer que l'on a

$$x^p \delta^{(q)} = \begin{cases} 0 & si\ p > q \\ (-1)^p \frac{q!}{(q-p)!} \delta^{(q-p)} & si\ p \le q \end{cases}$$

2. En déduire la formule

$$f\delta^{(q)} = \sum_{p=0}^{q} (-1)^p C_q^p f^{(p)} \delta^{(q-p)}$$

Où f est une fonction analytique à l'origine

3. Calculer

$$(Sin(x))\delta' \qquad \text{et} \qquad (Cos(x))\delta'$$

Question 4 (/4)

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |Sh(ax)|$

Où a est un réel donné

1. Développer f en série de Fourier.

2. En déduire la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2 + (2n+1)^2}$$

Corrigé

Question 1

$R \in \mathbb{R}_+^*$, $U = D(0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holo. dans U, $P = \mathrm{Re}(f)$; $Q = \mathrm{Im}(f)$.

$n \in \mathbb{N}^*$, $r \in]0,R[$. $t \in \mathbb{R}$.

$$f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$$

$$f(z) = f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

$$P(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + \overline{f(x,y)}\right]$$

$$Q(x,y) = \frac{1}{2i}\left[f(x,y) - \overline{f(x,y)}\right]$$

$$P(re^{it}) = \frac{1}{2}\left[f(re^{it}) + \overline{f(re^{it})}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k r^k e^{ikt} + \bar{a}_k r^k e^{-ikt}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt}\right) r^k$$

Les séries étant normalement CVtes, on a :

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-int}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi}\left(a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt}\right) e^{-int}\,d$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} r^k \left[a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,dt + \bar{a}_k \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t}\,dt\right]$$

$\neq 0 \Leftrightarrow k = n$; 0 ($k \neq -n$) !!

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-int}\,dt = \frac{1}{2}\cdot r^n a_n \cdot 2\pi$$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-int}\,dt}$$

$$Q(re^{it}) = \frac{1}{2i}\left[f(re^{it}) - \overline{f(re^{it})}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(a_k e^{ikt} - \bar{a}_k e^{-ikt}) r^k\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} Q(re^{it}) e^{int}\,dt = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty} r^k\left[a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t}\,dt - \bar{a}_k \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt\right]$$

$k \neq -n$!! $\neq 0 \Leftrightarrow k = n$

$$= \frac{1}{2i}\left[-\bar{a}_n 2\pi \cdot r^n\right] = i\pi r^n \bar{a}_n$$

$$\Rightarrow \therefore \bar{a}_n = \frac{1}{i\pi r^n}\int_0^{2\pi} Q(re^{it}) e^{+int}\,dt$$

$$\boxed{a_n = \frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} Q(re^{it}) e^{-int}\,dt}$$

Donc finalement :

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-int}\,dt = \frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} Q(re^{it}) e^{-int}\,dt$$

b) $f(0) \in \mathbb{R}$. $r \in]0, R[$, $z \in D(0,r)$:

$$f(z) \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) \frac{r + ze^{-it}}{r - ze^{-it}} dt$$

Or, $P(re^{it}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt})\right]$

$$= \frac{1}{2}(a_0 + \bar{a}_0) + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt})\right]$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt})$$

$a_0 = f(0) \in \mathbb{R}$!

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it})\, dt = a_0 \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt + \bar{a}_k \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt\right]$$

($\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt = 0$)

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it})\, dt.$$

$\forall z : |z| < r$:

$$\frac{1}{r - ze^{-it}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{r}e^{-it}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-int}$$

$$\frac{r + ze^{-it}}{r - ze^{-it}} = (r + ze^{-it})\left[\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-int}\right]$$

$$= \cancel{r}\left(1+\frac{z}{r}e^{-it}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-int}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)t}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-int}$$

Par la CV normale des séries précédentes

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})\,\frac{r+ze^{-it}}{r-ze^{-it}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})\,dt + \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n\int_0^{2\pi} P(re^{it})\,e^{-int}$$

$$= a_0 + \frac{1}{\cancel{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n\cdot\cancel{\pi}\,r^n a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$$

Nous avons donc :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})\,\frac{r+ze^{-it}}{r-ze^{-it}}\,dt}$$

c) On suppose $2a_0 = 1$, $R \geq 1$, $P(z) \geq 0$ si $|z| < 1$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in]0,1[$.

a) $\Rightarrow$ $$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-int} dt$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) dt$$

$$= \frac{2}{r^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) dt$$

$$= \frac{2}{r^n} a_0 = \frac{1}{r^n}$$

$\Rightarrow$ en faisant $r \to 1$, on obtient $|a_n| \leq 1$

d) Soit $\varepsilon > 0$. On définit une fonction h analytique dans le disque $D(0,1)$ par:

$$h(z) = \frac{1}{2[A + \varepsilon - \mathrm{Re}(a_0)]} [A + \varepsilon - \mathrm{Re}(a_0) + a_0 - f(Rz)]$$

Il vient alors:

$$h(0) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Re}\{h(z)\} = \frac{1}{2[A + \varepsilon - \mathrm{Re}(a_0)]} [A + \varepsilon - \mathrm{Re}\{f(Rz)\}] > 0$$

Compte-tenu de c), si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{|a_n| R^n}{2[A + \varepsilon - \mathrm{Re}(a_0)]} \leq 1$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit :

$$|a_n| \leq \frac{2}{R^n}\left[A - \mathcal{R}e\{a_0\}\right]$$

Par suite pour $0 \leq r < R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq |a_0| + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[A - \mathcal{R}e\{a_0\}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$= a_0 + \frac{2r}{R-r}\left[A - \mathcal{R}e\{a_0\}\right]$$

Question 2

① $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,+1]}(x)$.

1.a) $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$.

$= \int_{-1}^{+1} e^{itx}\,dx = \left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{it}$

$\hat{f}(t) = 2\,\frac{\sin t}{t}$ $\qquad \hat{f}(0) = 2$.

Th de Plancherel :

$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

$\|\hat{f}\|_2^2 = 4\int_{-\infty}^{-\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt$

$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{+1} 1^2\,dx = 2$

$\therefore\ 4\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt = 4\pi \Rightarrow \boxed{I_2 = \pi}$

1 b) $\widehat{(f*f)}(t) = (\hat{f}(t))^2 = 4\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$

$\Rightarrow$ il suffit de prendre $g(x) = \frac{2-|x|}{4}\,\mathbb{1}_{[-2,+2]}(x)$

$f, g \in L^2$ ∴ par le Th de Plancherel Paseval

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad \& \quad \|\hat{g}\|_2^2 = 2\pi \|g\|_2^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\,\hat{g}(t)\,dt = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\,\frac{\sin t}{t}\cdot\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt = 2I_3.$$

$$2\pi\langle f, g\rangle = 2\pi \int_{-1}^{+1} \frac{2-|x|}{4}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{2}\left[\int_{-1}^{0}(2+x)\,dx + \int_{0}^{1}(2-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{1}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{-\left(-2+\frac{1}{2}\right) + 2 - \frac{1}{2}\right\} = \frac{3\pi}{2}$$

$$2I_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\|\hat{g}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{g}(t)\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = I_4$$

$$2\pi \|g\|_2^2 = 2\pi \int_{-2}^{+2} \left(\frac{2-|x|}{4}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_{-2}^{+2} (2-|x|)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[8 - 8 + \frac{8}{3}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{2\pi}{3}}$$

② $a \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = e^{-a|x|}$

2.a) $\hat{g}_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g_a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-a|x|} dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+a)} dx + \int_0^{+\infty} e^{x(it-a)} dx$$

$$= \left[\frac{e^{x(it+a)}}{it+a}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{x(it-a)}}{it-a}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{it+a} - \frac{1}{it-a} = \frac{-2a}{-(t^2+a^2)} = \boxed{\frac{2a}{t^2+a^2} = \hat{g}_a(t)}$$

2.b) $\hat{g}_a \in L^1$, g est paire & donc :

$$\hat{\hat{g}}_a = g_a \Rightarrow 2a\int \frac{e^{itx}}{a^2+t^2}\,dt = e^{-a|x|}$$

$$\Rightarrow J_a(x) = \frac{1}{2a}e^{-a|x|}$$

NB : Si l'on utilise la convention $\hat{\hat{g}}_a = 2\pi g_a$, alors $J_a(x) = \frac{\pi}{a}e^{-a|x|}$

2.c) $h \in L^1$, $\therefore$ sa TF est bien définie :

$$\hat{h}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{5-6x+3x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{4+(3x-1)^2}\,dx$$

$3x-1 = \xi \quad 3\,dx = d\xi$

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\left(\frac{\xi+1}{3}\right)}}{2^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{e^{i\frac{t}{3}}}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{t}{3}\xi}}{2^2+\xi^2}\,d\xi}$$

$$= \frac{e^{i\frac{t}{3}}}{3}J_2\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{e^{i\frac{t}{3}}}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-2\left|\frac{t}{3}\right|}$$

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{12}e^{i\frac{t}{3}-\frac{2}{3}|t|}$$

Si $J_a(x) = \frac{\pi}{a}e^{-a|x|}$: $\hat{h}(t) = \frac{e^{i\frac{t}{3}}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-\frac{2}{3}|t|} = \frac{\pi}{6}e^{i\frac{t}{3}-\frac{2}{3}|t|}$

$g_a, g_b \in L^1$, $\hat{g}_a, \hat{g}_b$ sont bien définies. ($b>0$)

$\varphi(x) = (g_a * g_b)(x) \Rightarrow \hat{\varphi}(t) = \hat{g}_a(t)\,\hat{g}_b(t)$

$\Rightarrow \hat{\varphi}(t) = \dfrac{4ab}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$ Supposons $a \neq b$.

Alors: $\hat{\varphi}(t) = \dfrac{4ab}{b^2-a^2}\left[\dfrac{1}{a^2+t^2} - \dfrac{1}{b^2+t^2}\right]$

$\hat{\varphi} \in L^1$, φ est paire, donc:

$\hat{\hat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$

$\Rightarrow \dfrac{4ab}{b^2-a^2}\left\{J_a(x) - J_b(x)\right\} = \varphi(x)$

$\dfrac{4ab}{b^2-a^2}\left\{\dfrac{1}{2a}e^{-a|x|} - \dfrac{1}{2b}e^{-b|x|}\right\} = \varphi(x)$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \dfrac{1}{b^2-a^2}\left\{b e^{-a|x|} - a e^{-b|x|}\right\}}$

(3) ($a>0$) $K = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\frac{\sin t}{t}\,dt$

$= \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\,\hat{f}(t)\,dt$ où $\hat{f}, g_a \in L^1$

La formule d'inversion est alors applicable :

$$K = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}_a(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} \frac{2a}{a^2+t^2}\,dt = a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \operatorname{Arctg}\frac{t}{a}$$

$$\therefore \boxed{K = \operatorname{Arctg}\frac{1}{a}}$$

Question 3

i) $p, q \in \mathbb{N}$.

$$x^p \delta^{(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > q \\ (-1)^p \frac{q!}{(q-p)!} \delta^{(q-p)} & \text{si } p \leq q \end{cases}$$

$x^p \in \mathcal{C}^\infty$, $\therefore$ $x^p \delta^{(q)}$ est bien défini. $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle x^p \delta^{(q)}, \varphi \rangle = \langle \delta^{(q)}, x^p \varphi \rangle$$

$$= (-1)^q \langle \delta, (x^p \varphi)^{(q)} \rangle$$

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

$$(fg)^{(2)} = \frac{d}{dx}(fg)' = \frac{d}{dx}(f'g + fg')$$

$$= f''g + f'g' + f'g' + fg''$$

$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)^{(3)} = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg'''$$

$$= f^{(3)}g + 3f^{(2)}g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$$

$$\langle x^p \delta^{(q)}, \varphi \rangle = (-1)^q \langle \delta, (x^p \varphi)^{(q)} \rangle$$

$$(x^p \varphi)^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} C_q^k (x^p)^{(k)} \varphi^{(q-k)}$$

$$(x^p)^{(k)} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)\, x^{p-k}$$

$$= \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k}$$

$$(x^p \varphi)^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} C_q^k \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} \varphi^{(q-k)}$$

$$\langle x^p \delta^{(q)}, \varphi \rangle = (-1)^q \sum_{k=0}^{q} C_q^k \frac{p!}{(p-k)!} \langle \delta, x^{p-k} \varphi^{(q-k)} \rangle$$

$$= (-1)^q \sum_{k=0}^{q} C_q^k \frac{p!}{(p-k)!} \left\{ x^{p-k} \varphi^{(q-k)} \right\}\Big|_{x=0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{k=p}$: $\langle x^p \delta^{(q)}, \varphi \rangle = (-1)^q C_q^p \frac{p!}{0!} \varphi^{(q-p)}(0)$

$$= (-1)^q \frac{q!}{\cancel{p!}(q-p)!} \cdot \cancel{p!}\, \varphi^{(q-p)}(0)$$

$$= (-1)^q \frac{q!}{(q-p)!} (-1)^{q-p} \langle \delta^{(q-p)}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$x^p \delta^{(q)} = (-1)^p \frac{q!}{(q-p)!} \cdot \delta^{(q-p)}$$

Si f est une fonc^{n} analytique à l'origine:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f \in \mathcal{E}^{\infty}$ est $f\delta^{(q)}$ a un sens. $\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle f\delta^{(q)}, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \langle x^n \delta^{(q)}, \varphi \rangle$$

En utilisant le résultat précédent:

$$\langle x^n \delta^{(q)}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall n > q$$

Si $n \leq q$:

$$\langle f\delta^{(q)}, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{q} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \langle x^n \delta^{(q)}, \varphi \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{q} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (-1)^n \frac{q!}{(q-n)!} \langle \delta^{(q-n)}, \varphi \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{q} (-1)^n C_q^n f^{(n)}(0) \langle \delta^{(q-n)}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\delta^{(q)} = \sum_{n=0}^{q} (-1)^n C_q^n f^{(n)}(0) \delta^{(q-n)}}$$

$f(x) = \sin x$:

$$\sin x\,\delta' = \sum_{p=0}^{1} (-1)^p \binom{1}{p} (\sin x)^{(p)}\Big|_{x=0} \cdot \delta^{(1-p)}$$

$$= (-1)^0 \binom{1}{0} (\sin x)^{(0)}\Big|_{x=0} \delta^{(1-0)}$$

$$+ (-1)^1 \binom{1}{1} (\sin x)^{(1)}\Big|_{x=0} \delta^{(1-1)}$$

$$= 0 - \delta \quad \Rightarrow \boxed{\sin x\,\delta' = -\delta}$$

$f(x) = \cos x$:

$$\cos x\,\delta' = \sum_{p=0}^{1} (-1)^p \binom{1}{p} (\cos x)^{(p)}\Big|_{x=0} \delta^{(1-p)}$$

$$= (-1)^0 \binom{1}{0} (\cos x)^{(0)}\Big|_{x=0} \delta^{(1-0)}$$

$$+ (-1)^1 \binom{1}{1} \underbrace{(-\sin x)\Big|_{x=0}}_{0} \delta^{(1-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x\,\delta' = \delta'}$$

Question 4

f définie sur $[-\pi, +\pi]$.

$f(x) = |\mathrm{Sh}ax|$. $a \in \mathbb{R}$

f est paire. ∴ elle se développe en série de cosinus :

$$|\mathrm{Sh}ax| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{Cos}nx .$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Sh}ax\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\mathrm{Ch}ax}{a}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi a}(\mathrm{Ch}a\pi - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Sh}ax\,\mathrm{Cos}nx\,dx$$

$\mathrm{Cos}nx = u$ $\quad -n\,\mathrm{Sin}nx\,dx = du$

$\mathrm{Sh}ax\,dx = dv$ $\quad \frac{1}{a}\mathrm{Ch}ax = v$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\mathrm{Cos}nx\,\mathrm{Ch}ax}{a}\right]_0^{\pi} + \frac{n}{a}\int_0^{\pi} \mathrm{Ch}ax\,\mathrm{Sin}nx\,dx\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{Cos}n\pi\,\mathrm{Ch}a\pi - 1}{a} + \frac{n}{a}\int_0^{\pi} \mathrm{Ch}ax\,\mathrm{Sin}nx\,dx\right\}$$

$\mathrm{Sin}nx = u$ $\quad +n\,\mathrm{Cos}nx\,dx = du$

$\mathrm{Ch}ax\,dx = dv$ $\quad \frac{1}{a}\mathrm{Sh}ax = v$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n\mathrm{Ch}a\pi - 1}{a} + \frac{n}{a^2}\left[\mathrm{Sin}nx\,\mathrm{Sh}ax\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{a^2}\int_0^{\pi} \mathrm{Sh}ax\,\mathrm{Cos}nx\,dx\right.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n Cha\pi - 1}{a} - \frac{n^2}{a^2}\cdot\frac{\pi}{2}a_n\right\}$$

$$a_n\left(1+\frac{n^2}{a^2}\right) = \frac{2}{a\pi}\left[(-1)^n Cha\pi - 1\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n Cha\pi - 1}{n^2+a^2}$$

$\forall x \in [-\pi, +\pi]$ on peut donc écrire:

$$\boxed{|Shax| = \frac{Cha\pi - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n Cha\pi - 1}{n^2+a^2}\,Cosnx}$$

La série de Fourier étant absolument CV & la fonct° périodique $\tilde{f}$, de période 2π, égale à $|Shax|$ sur $[-\pi, +\pi]$, étant continue, la CV de la série vers $\tilde{f}(x)$ a lieu $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mettons $x = \pi$:

$$Sha\pi = \frac{Cha\pi - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Cha\pi - 1}{n^2+a^2}\cdot(-1)^n$$

$$= \frac{Cha\pi - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Cha\pi - (-1)^n}{n^2+a^2} \quad (*)$$

Mettons $x = 0$:

$$0 = \frac{Cha\pi - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Cha\pi - 1}{n^2+a^2}$$

$$0 = \frac{\mathrm{Cha}\pi - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Cha}\pi - (-1)^n}{n^2 + a^2} (-1)^n \quad (**)$$

$$(*) - (**) : \quad \mathrm{Sha}\pi = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Cha}\pi - (-1)^n}{n^2 + a^2} \left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4a} \frac{\mathrm{Sha}\pi}{1 + \mathrm{Cha}\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 + a^2}}$$

Module : Mathématiques appliquées (MA11) (rattrapage de juin)
Durée : 1h
Documents autorisés : Fascicules de cours

Sujet

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des fonctions périodiques (de période 1) et carré intégrables sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $\varphi \in \mathcal{H}$ la fonction définie par:

$$\varphi(t) = t - \frac{1}{2} \qquad t \in [0,1].$$

Si $f \in \mathcal{H}$, on pose

$$(Kf)(t) := \int_0^1 \varphi(t-s) f(s)\, ds \;, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1°) Vérifier que $Kf \in \mathcal{H}$, et que K est continu.

2°) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

où $e_n(t) = \exp(i2\pi nt)$. Calculer les coefficients de Fourier de Kf en fonction des c_n.

3°) (Facultative). Soit $z \in \mathbb{C}$ $(z \neq 0)$. Déterminer le spectre de l'opérateur $\mathbb{1} + zK$, où $\mathbb{1}$ désigne l'opérateur identité dans $\mathcal{H}$.

Module : Probabilités (PS11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Aucun

Sujet

Justifier chaque réponse de façon concise. ***Répondre sur le questionnaire même***, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois questions ou exercices sont "indépendants".

1] Indépendance de variables aléatoires

Donner la définition de l'indépendance de 2 variables aléatoires réelles X et Y scalaires définies sur un même espace probabilisé.

En donner plusieurs caractérisations (en précisant pour chacune d'elles son domaine d'application (variables aléatoires discrètes, continues ou mixtes).

2] Mélange de lois gaussiennes

On suppose qu'un pixel d'image satellitaire peut être modélisé de la façon suivante : il a une probabilité p d'être issu d'un pixel de forêt et une probabilité $1-p$ d'être issu d'un pixel d'eau. Le niveau d'intensité lumineuse est dans chacun de ces deux types de pixels modélisé par une loi gaussienne (respectivement $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ pour un pixel de forêt et $\mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$ pour un pixel d'eau).

3] Changement de variable

Soit X, une variable aléatoire de loi exponentielle ($f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$).

3.1] Que peut-on dire de $P[X>a+b/X>a]$ pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$? Interprétation ?

On associe à X, sa partie entière X_e et sa partie fractionnaire X_f définies par $X = X_e+X_f$ et $X_f \in [0,1[$.

3.2] Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_e et X_f.

3.3] Démontrer que les variables aléatoires X_e et X_f sont indépendantes.

(on utilisera pour critère d'indépendance dans le cas de 2 variables aléatoires X et Y où X est discrète et Y continue : $P[X=x_k \cap Y< y] = P[X=x_k]\, P[Y< y]$, $\forall x_k,y$).

3.4] Soit $Y = uX$ avec u constante strictement positive. Démontrer que

$$\lim_{u\to\infty} P(Y_f \in [a,b[) = b-a, \quad \forall a,b \in [0,1]$$

(On commencera par déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y=uX$). Interprétation ?

Corrigé

Correction succinte (Module PS 11 CC du 21.1.1999, J.P.Delmas)
Une erreur de copier/coller s'est glissée dans l'exercice 2 question 2.2

1] Indépendance de variables aléatoires

Définition : $P(X\in B_1 \cap Y\in B_2) = P(X\in B_1)P(Y\in B_2)$, $\forall B_1\in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ et $\forall B_2\in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Caractérisation à l'aide des fonctions de répartition : v.a. discrètes, continues ou mixtes

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y),\ \forall x,y\in \mathbb{R}^2.$$

ou plus simplement $F_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y),\ \forall x,y\in \mathbb{R}^2.$

à l'aide des probabilités : v.a. discrètes

$$P[(x,y) = (x_i,y_j)] = P(x = x_i)P(y = y_j),\ \forall i,j\in \mathbb{N}^2.$$

à l'aide des densités de probabilité : v.a. continues

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),\ \forall x,y\in \mathbb{R}^2.$$

ou plus simplement $f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y),\ \forall x,y\in \mathbb{R}^2.$

à l'aide des fonctions caractéristiques : v.a. discrètes, continues ou mixtes

$$\phi_{X,Y}(u,v) = \phi_X(u)\phi_Y(v),\ \forall u,v\in \mathbb{R}^2.$$

ou plus simplement $\phi_{X,Y}(u,v) = g(u)h(v),\ \forall u,v\in \mathbb{R}^2.$

2] Mélange de lois gaussiennes

2.1] D'après la formule des probabilités totales

$$F_X(x) = P(\text{eau})P(X<x/\text{eau}) + P(\text{forêt})P(X<x/\text{forêt})$$

et par dérivation :

$$f_X(x) = p\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-p)\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (a)$$

2.2] $\mathrm{E}(X) = pm_1+(1-p)m_2$ et $\mathrm{E}(X^2) = p(\sigma_1^2+m_1^2)+(1-p)(\sigma_2^2+m_2^2)$

Par suite :

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X) = p(\sigma_1^2+m_1^2)+(1-p)(\sigma_2^2+m_2^2)-[pm_1+(1-p)m_2]^2$$
$$= p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2 + 4p(1-p)[\frac{m_1-m_2}{2}]^2,$$

$\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$ peuvent s'interpréter à l'aide des deux courbes en cloches centrées en m_1 et m_2 (a).

3] Changement de variable

3.1] $$P[X>a+b/X>a] = \frac{P[(X>a+b)\cap(X>a)]}{P(X>a)}$$

et pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$ $\{X>a+b\}\subset\{X>a\} \Rightarrow (\{X>a+b\}\cap\{X>a\}) = \{X>a+b\}$.

Donc : $$P[X>a+b/X>a] = \frac{P(X>a+b)}{P(X>a)}$$

et puisque

$$P[X>x] = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda x} \text{ pour } x>0,$$

$$P[X>a+b/X>a] = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b},$$

ne dépend pas de a. Pour cette raison, la loi exponentielle est appelée *loi sans mémoire continue.*

3.2] X a pour fonction de répartition $F_X(x) = (1-e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

X_e est une v.a. discrète entière positive :

$$P(X_e = k) = P(X \in [k,k+1[) = F_X(k+1) - F_X(k) = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

X_f est une v.a. continue à valeurs dans $[0,1[$:

$$F_{X_f}(x) = P(X_f < x) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} X \in [k,k+x[) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \in [k,k+x[)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} F_X(k+x) - F_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x}) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \text{ pour } x \in [0,1[.$$

Soit : $f_{X_f}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$.

3.3] $X_e = k \cap X_f < x = X \in [k,k+x[$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0,1[$. Par suite :

$$P[X_e=k \cap X_f < x] = P\{X \in [k,k+x[\} = F_X(k+x) - F_X(k) = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x})$$

$$= e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda}) \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} = P[X_e=k\,]P[X_f < x].$$

Les variables alétoires X_e et X_f sont donc indépendantes.

3.4] $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < \frac{y}{u}) = F_X(\frac{y}{u}) = (1-e^{-\lambda y/u})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$ (loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{u}$. Par suite d'apres 3.1]:

$$P(Y_f \in [a,b[) = \frac{1-e^{-\lambda b/u}}{1-e^{-\lambda/u}} - \frac{1-e^{-\lambda a/u}}{1-e^{-\lambda/u}} \sim \frac{\frac{\lambda}{u}b - \frac{\lambda}{u}a}{\frac{\lambda}{u}} = b-a, \ \forall a,b \in [0,1] \text{ pour } u \to +\infty.$$

La partie fractionnaire de Y converge en loi vers une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ quand $u \to +\infty$. C'est naturel car l'amplification de X entraîne un "aplatissement" de la densité de Y.

Module : Analyse de données (AD11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Fascicules de cours

Sujet

Six personnes notées A, B, C, D, E et F ont répondu par oui ou par non aux questions Q1 et Q2. On a noté k(i,j)=1 si i a répondu oui à la question j et 0 sinon. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Q1	Q2
A	1	1
B	0	0
C	0	1
D	1	0
E	1	1
F	0	0

Première partie :

1. Effectuer l'AFC de ce tableau le plus simplement possible
2. Effectuer l'ACP de ce tableau le plus simplement possible
3. Les individus B et F ne sauraient être représentés dans la première analyse. Pourquoi?

Deuxième partie :

Remarquons que la façon de faire précédente privilégie les réponses positives aux questions. Pour éviter cet inconvénient, on dédouble dans la suite les colonnes de la façon suivante :
Q1 et remplacé par deux colonnes notées O1 et N1.
Q2 est remplacé par deux colonnes notées O2 et N2.
O1 signifie "oui à la question 1", N1 signifie "non à la question 1" …
On note alors k(i,j)=1 si j est la réponse souhaitée par i, 0 sinon.

4. Exhiber alors le nouveau tableau ainsi obtenu
5. Effectuer l'AFC de ce nouveau tableau
6. Effectuer l'ACP de ce même tableau

Troisième partie :

7. Dans le 1. on peut réduire le tableau avant d'effectuer l'AFC. Effectuer l'ACP de ce tableau réduit.
8. Quel enseignement peut-on tirer de ces diverses questions en imaginant l'application de ce problème au dépouillement d'un gros questionnaire soumis à une grande population?

Corrigé

Première partie

1. AFC : En analyse factorielle des correspondances, les lignes (ou colonnes) ayant même profil sont cumulées. Les lignes (ou colonnes) de poids nul ne sont pas représentées.
On se ramène donc ici au tableau suivant :

	Q1	Q2	$k_{i.}$
AE	2	2	4
C	0	1	1
D	1	0	1
$k_{.j}$	3	3	6

On en déduit la matrice S de terme général : $s_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{i.}k_{.j}}}$

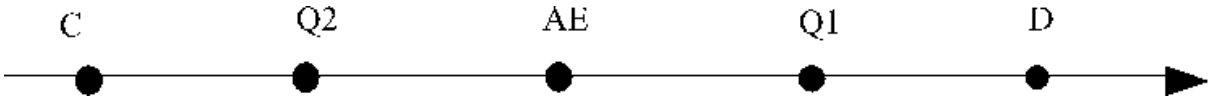
$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^tSS = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

On cherche ensuite les valeurs propres et vecteurs propres

$$\det({}^tSS - \lambda I) = 0$$

On obtient $\lambda = 1$ valeur propre triviale et $\lambda_1 = \frac{1}{3} \longrightarrow \rho u_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \longrightarrow \rho t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

On obtient donc $F_1(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $G_1(j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$



On a immédiatement tous les COR=1
De plus CTR(AE)=0, tous les autres =1/2

2. ACP : Effectuons l'ACP centrée réduite : on forme la matrice X de terme général $x_{ij} = \frac{k_{ij} - \bar{k}_j}{\sigma_j}$

	Q1	Q2
A	1	1
B	-1	-1
C	-1	1
D	1	-1
E	1	1
F	-1	-1

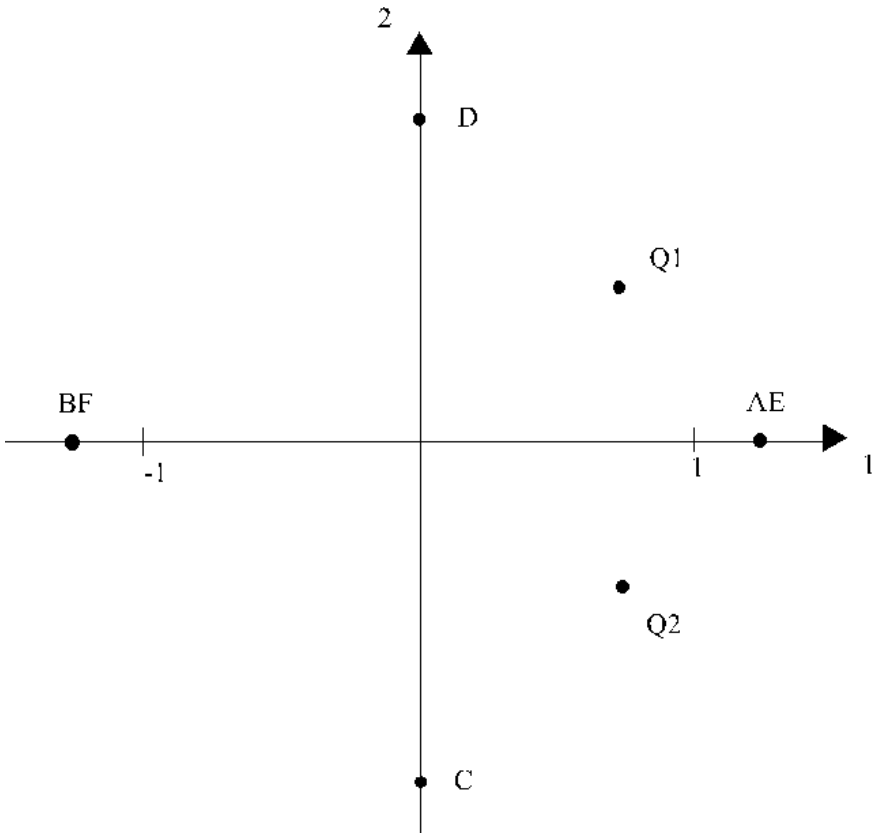
et on obtient donc ${}^tXX = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

On trouve les deux valeurs propres et leurs vecteurs propres associés :

$\lambda_1 = 8 \longrightarrow \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$ et $\lambda_2 = 4 \longrightarrow \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$

On a bien Inertie = 8+4 = 12 = n.p

On obtient $F_\alpha(i) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ et $G_\alpha(j) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$



L'AFC a séparé les individus qui répondent positivement à Q1 ou à Q2. Le deuxième axe de l'ACP correspond à l'axe unique de l'AFC. L'AFC ignore B et F qui par leur poids nul ne pouvaient être représentés. Le 1er axe de l'ACP les opposent à A et E logiquement.

Deuxième partie

Fort de ce qui a été remarqué dans la première partie, nous allons dédoubler le tableau pour ne pas privilégier une réponse positive par rapport à une réponse négative, ce qui aura pour conséquence de ne pas faire disparaître B et F dans l'AFC.

4. Le nouveau tableau s'écrit alors :

	O_1	N_1	O_2	N_2
A	1	0	1	0
B	0	1	0	1
C	0	1	1	0
D	1	0	0	1
E	1	0	1	0
F	0	1	0	1

5. AFC : On cumule les lignes ayant même profil (idem colonnes si besoin)
On a donc ici

	O_1	N_1	O_2	N_2	
AE	2	0	2	0	4
BF	0	2	0	2	4
C	0	1	1	0	2
D	1	0	0	1	2
	3	3	3	3	

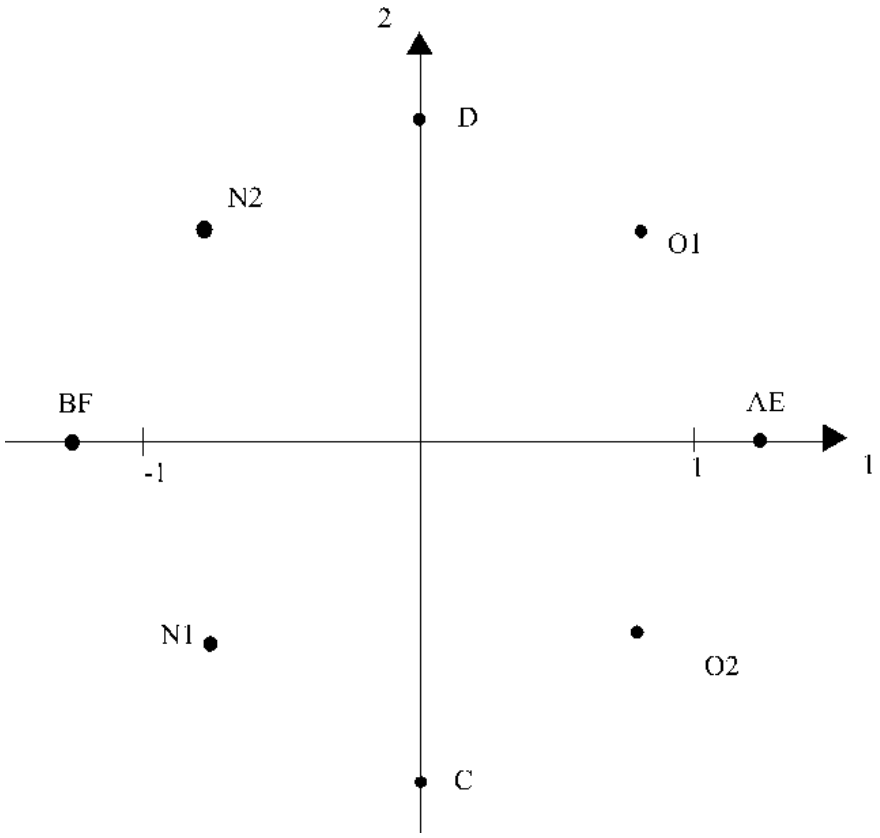
On en déduit S

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tSS = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

On obtient les valeurs propres suivantes $\lambda = 1 \quad \lambda_1 = \frac{2}{3} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \longrightarrow \overset{\rho}{u_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \longrightarrow \overset{\rho}{u_2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

On obtient $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$



6. ACP : Le tableau soumis à l'ACP centrée réduite sera :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^tXX = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

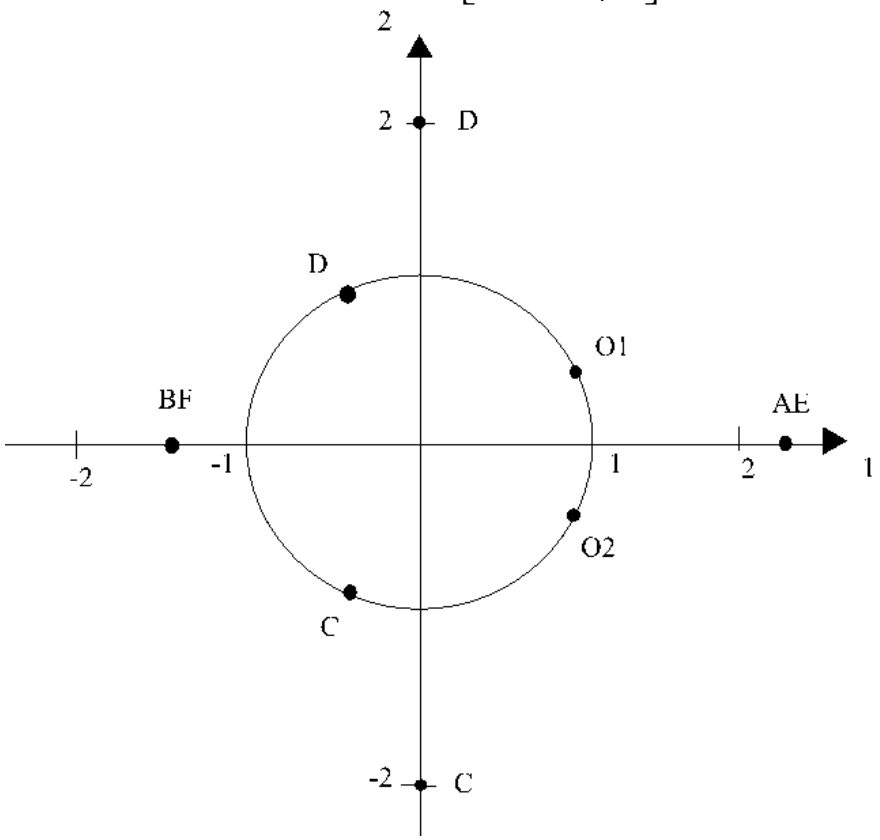
$\det({}^tXX - \lambda I) = 0$ donne les valeurs propres. On trouve : $\lambda_1 = 16 \quad \lambda_2 = 8 \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

On a bien $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 16 + 8 = 24 = Inertie = n.p$

Le nuage est ici dans un plan. Ceci est du à la complémentarité des colonnes.

$$\lambda_1 = 16 \longrightarrow \overset{\rho}{u}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 8 \longrightarrow \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

On obtient $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$



Troisième partie

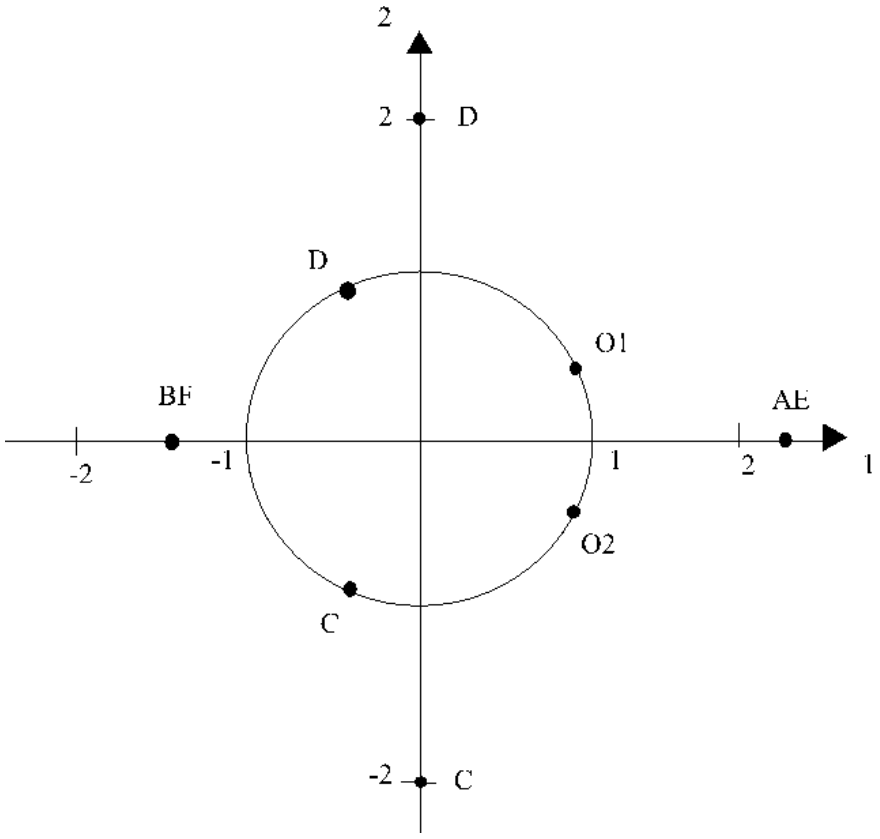
7. A partir du tableau cumulé associé à l'AFC de la première partie, le tableau de l'ACP centrée réduite correspondante serait, compte tenu de $\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2 = \frac{3}{4}$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{\frac{11}{16}}$,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{11}} & \frac{5}{\sqrt{11}} \\ \frac{-3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{-3}{\sqrt{11}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tXX = \begin{bmatrix} 4 & \frac{28}{11} \\ \frac{28}{11} & 4 \end{bmatrix}$$

On obtient donc $\lambda_1 = \frac{72}{11} \longrightarrow \rho u_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$ et $\lambda_2 = \frac{16}{11} \longrightarrow \rho u_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$

On a bien $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{88}{11} = 8 = Inertie = n.p$

On trouve $F = \frac{1}{\sqrt{92}} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -2 & -4 \\ -2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ et $G = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 2 \\ 3\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$



On a vu que l'AFC effectuée correctement sur un tableau en tenant compte que des réponses positives écartait l'ensemble des individus qui auraient répondus négativement à toutes les questions. L'ACP semble alors plus adaptée mais par contre, elle ramène toute ligne et toute colonne au même

poids et ne rend pas compte par conséquent de l'adhésion plus ou moins importante à certaines questions.
Les tableaux manipulés étant homogènes (ils sont même sous forme logique) il n'y a aucune opposition à ce qu'ils soient traités en AFC. La meilleure étude sera sûrement l'AFC des tableaux dédoublés afin de ne pas privilégier les réponses positives par rapport aux réponses négatives, tout en gardant les poids relatifs c'est à dire l'adhésion plus ou moins massive à une réponse positive ou négative.

UV Gestion

Module : Economie générale (EC11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Aucun

Sujet

1. Qu'est ce que l'effet d'éviction ? Pourquoi est-il mis en avant pour combattre les politiques de relance keynésiennes ? (2 points)

2. Le multiplicateur keynésien : définition, mode de calcul et intérêt pour la politique économique (4 points)

3. Supposons que, dans un pays donné, les ménages ne consomment que deux produits A et B pendant deux périodes, selon les prix et les quantités suivants (6 points)

	Période 1	Période 2	Période 1	Période 2
Produit	A	A	B	B
Prix unitaire	120	130	40	30
Quantités consommées	12	8	6	10

   a. Comment a évolué la consommation du produit B en valeur, prix et volume entre les deux périodes en pourcentages ?
   b. Quelle relation générale existe-t-il entre ces trois évolutions ?
   c. Calculer les indices de Laspeyres-prix et de Paasche-prix de l'évolution de la consommation totale des ménages. Expliquer les résultats obtenus.

4. Quelle est l'équation générale d'équilibre des opérations sur biens et services qui sert de base à la construction du tableau entrée-sortie (TES) de la comptabilité nationale française. Expliquez la signification de chacun des termes de l'équation. (2 points)

5. L'équilibre du monopoleur. Mode de calcul, illustration graphique et explication détaillée des courbes qui le constituent (coût moyen, coût marginal...). Quelles sont les différences essentielles, du point de vue du consommateur, avec la situation d'équilibre qui découle de la concurrence pure et parfaite. (4 points)

6. Comment le producteur optimise-t-il, sous contrainte de budget, l'utilisation de ses facteurs de production (capital et travail) ? Illustration graphique. (2 points)

Corrigé

1. L'effet d'éviction est le fait de décourager les investissements privés par la hausse des taux d'intérêt. En effet si les taux d'intérêt augmentent trop, à partir d'un certain niveau, les investissements privés connaissent une chute. Cet effet est mis en avant pour combattre les politiques de relance keynésienne. En effet, pour empêcher l'inflation, la relance keynésienne propose une augmentation des taux d'intérêt ce qui pourrait provoquer le départ des investisseurs privés.

2. Définition :
   Une augmentation d'investissement dans une économie provoque une augmentation d'activité ΔY proportionnelle à l'augmentation d'investissement ΔI.

Le facteur de proportionnalité, noté k, est le multiplicateur keynésien
$\Delta Y = k.\Delta I$

Mode de calcul :
Si l'Etat investit ΔI (par exemple en finançant la construction d'une route), ce DI pourra être considéré comme un revenu Y1 (salaires pour les employés).
Et ce revenu Y1 va être - en partie réinvesti par les salariés <- c.Y1
- en partie épargné <- S1
$\Delta I = Y1$ -> c.Y1
-> S1
c étant la propension marginale à consommer

alors c.Y1 = Y2 est réinjecté dans le circuit, le même phénomène s'observe
Y2 -> c.Y2 = Y3
-> S1
et ainsi de suite...

Finalement $\Delta Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i = Y_1 . \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{\Delta I}{1-c}$

Conclusion : $k = \frac{1}{1-c}$

Intérêt pour la politique économique :
On a k>1 donc on tire un bénéfice de l'investissement effectué. Ceci est la base de la théorie keynesienne de relance de l'économie par introduction d'un déficit budgétaire :
L'Etat introduit un déficit budgétaire ΔI, par le multiplicateur keynésien, cet investissement permet un accroissement de l'activité plus grand $\Delta Y > \Delta I$, la production est donc relancée.
Alors grâce à l'imposition, il y aura un accroissement des recettes de l'Etat que l'on pourra espérer supérieur aux dépenses engagées pour dégager le ΔI.
Le déficit sera comblé et la croissance aura repris.

3.

a. Le prix du produit B a diminué de 25% entre les 2 périodes. Sa consommation en volume a augmenté de 67%. Sa consommation en valeur est passée de 240 à 300, elle a donc augmenté de 25%.

b. $I_{valeur} = \frac{I_{volume} I_{prix}}{100}$

c. Indice de Laspeyres-prix :
$L^p = 1,1$

Indice de Paasche-prix :
$P^p = 0,98$

$L^p > 1$ car dans le panier des ménages étudié, le prix de A augmente et on ne considère pas dans ce calcul la diminution de sa quantité consommée. De même pour le produit B, on ne tient pas compte de l'augmentation de sa consommation due à la diminution de son prix.
On a donc finalement un indice des prix qui augmente

$P^p < 1$ car dans ce calcul de l'indice de Paasche-prix, on a une consommation faible du produit A dont le prix augmente et une forte consommation du produit B dont le prix diminue. L'indice diminue donc globalement.

4. La construction du TES de la comptabilité nationale est fondée sur l'équilibre de la demande et de l'offre globale qui se traduit par l'équation :

$Y + M = C + I + X$

Y : production
M : importation
Y+M : offre globale
C : consommation
I : investissement
I = FBCF + Stocks
FBCF = formation brute de capital fixe (investissement à long terme)
X : exportation
C+I+X : demande globale

5. L'équilibre du monopoleur

- R_T : ressource totale du monopole
  $R_T = p.q$
  RM : ressource moyenne
  $R_M = R_T/q = p$
  Donc la courbe de R_M est égale à la courbe de la demande globale
  R_m : recette moyenne = gain supplémentaire apporté par la production d'une unité supplémentaire
  $R_m = dR_T/dq$
- De la même façon, on a :
  C_T : coût total de la production
  C_M : coût moyen
  $C_M = C_T/q$
  C_m : coût marginal : dépense supplémentaire occasionnée par la production d'une unité supplémentaire
  $C_m = dC_T/dq$
- On cherche la quantité à produire et le prix à fixer afin de maximiser le profit du monopole
  $\Pi = R_T - C_T$
  Donc $d\Pi/dq = 0$ ssi $R_m = C_m$
  Le monopole fait donc du profit tant que sa ressource marginale est supérieure au coût marginal
- Dans le cas de la concurrence pure et parfaite, le prix de vente est imposée à l'entreprise par le marché. Et en fait, pour maximiser son profit, l'entreprise doit produire de façon à ce que $p = C_m$ (en B)

  On s'aperçoit que la concurrence pure et parfaite offre au consommateur un prix moins élevé que le monopole tout en lui proposant davantage de produits.

Module : Gestion financière et marketing (GF11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Aucun

Sujet

Traiter les dix questions suivantes en essayant d'y répondre de façon précise (2 points par question)

1. Citer au moins deux principes de base de la comptabilité française, en précisant leur signification.
2. Quelle différence essentielle existe-t-il entre un organigramme et un sociogramme ?
3. Expliquer brièvement les différences majeures existant entre la comptabilité française et la comptabilité anglo-saxonne.
4. Que mesure le bilan de l'entreprise ? Que mesure le compte de résultat ?
5. Comment calcule-t-on la valeur ajoutée d'une entreprise ?
6. Qu'est ce que la méthode pay-back (retour d'investissement) ? Description et commentaires.
7. Expliquer les différences essentielles entre un panel et une étude de marché.
8. Décrire et commenter les principales phases de la courbe de vie d'un produit.
9. Citer deux exemples distincts d'objectifs publicitaires pour une entreprise.
10. Décrire et expliquer le modèle du Boston Consulting Group.

Corrigé

1. Deux principes de base de la comptabilité française :

- Principe d'indépendance de l'exercice :
  Toutes les activités indiquées dans la comptabilité de l'entreprise doivent commencer et finir dans l'année étudiée (même si les frontières ainsi établies ne sont qu'arbitraires et si dans la réalité des exercices courent sur plusieurs années).
- Principe de prudence
  On indique dans la comptabilité, une charge (moins-value) dès qu'elle est probable, mais on n'indique un produit (plus-value) que lorsqu'il est certain d'être réalisé.

2. Un organigramme est un document public montrant la répartition théorique du pouvoir dans l'entreprise.
   Un sociogramme, lui, présente la répartition réelle du pouvoir dans l'entreprise (document plus confidentiel)

3. Différences entre comptabilité française et comptabilité anglo-saxonne
   La comptabilité française est une comptabilité avec une certaine coloration fiscale (car elle est très utilisée par le fisc pour contrôler les comptes de l'entreprise) mais elle dispose de nombreux autres utilisateurs, comme les banques, les clients, les fournisseurs, les investisseurs... . Dans le cadre de la comptabilité anglo-saxonne au contraire, un utilisateur est privilégié : l'investisseur. Donc dans le cadre anglo-saxon, il y a valorisation des biens du fait des fluctuations de la monnaie. Donc la comptabilité anglo-saxonne n'indique pas les biens à leur coût historique mais à leur coût actuel, prenant donc en compte l'inflation; contrairement à la comptabilité française qui doit respecter le principe de continuité de l'exercice et donc garder le prix historique des biens. De plus le principe de prudence propre à la comptabilité française n'est pas appliqué dans la comptabilité anglo-saxonne.

4. Le bilan d'une entreprise est la photographie à un instant donné de la situation économique et financière de l'entreprise
   Le compte des résultats est le relevé de toutes les transactions effectuées par l'entreprise au cours d'une année. Il permet donc de mesurer les recettes et les dépenses (charges) de l'entreprise au cours de l'année

5. On a la formule suivante :

   VA = MC + Pdn – (∆S + achats externes)

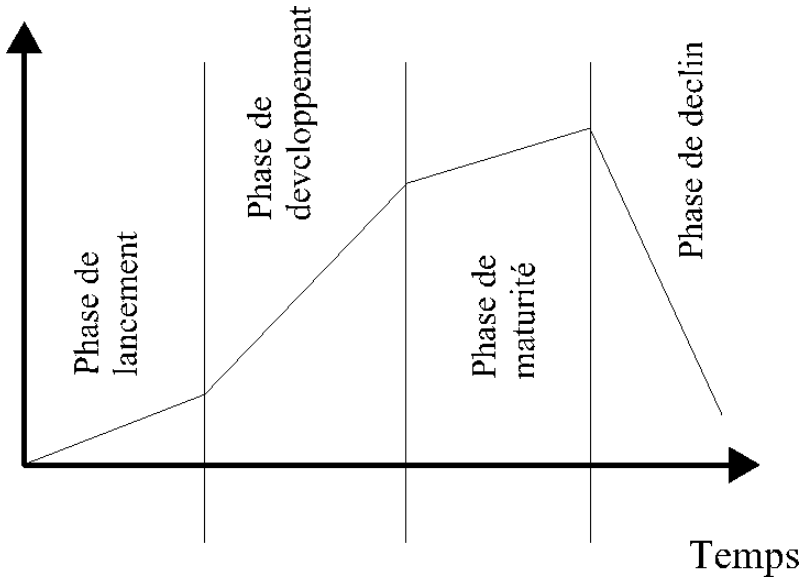
   où VA est la valeur ajoutée. Elle représente la contribution de l'entreprise à l'économie
   MC est la marge commerciale c'est à dire l'argent gagné en achetant des marchandises et en les revendant.
   Pdn est la production totale (vendue + stockée + immobilisée)
   DS est la variation des stocks de matière première (Stocks initiaux-finaux)
   Achats externe représentent les marchandises achetées par la production et les autres frais externes tels que l'électricité par exemple.

6. Le choix d'un investissement peut s'effectuer selon divers critères :
   -on peut choisir l'investissement qui rapportera les plus grandes recettes
   -on peut choisir l'investissement par la méthode du Pay Back
   -on peut choisir l'investissement par la méthode du maximin (maximiser le minimum des recettes prévues)
   -on peut choisir l'investissement par la méthode du regret minimal

   La méthode du Pay Back consiste à regarder à partir de combien de temps notre investissement nous sera totalement remboursé et à choisir l'investissement qui sera remboursé dans les plus courts délais.
   La méthode du Pay Back consiste donc à choisir l'investissement avec lequel on commencera à faire du profit le plus rapidement mais ce profit ne sera pas forcément optimal.
   Cette méthode a donc des avantages (rentrée rapide d'argent) mais aussi des inconvénients (on n'est pas sûr d'être dans le cas optimal.

7. Une étude de marché, quelle soit qualitative (questions ouvertes) ou quantitative (questions fermées), s'adresse à un public diversifié (la quantité de personnes interrogées dépend de l'étude effectuée).
   Au contraire, un panel consiste en une étudie sur un groupe limité de personnes présentant des caractéristiques similaires.
   Ainsi, on cherche à étudier la réaction d'un certain public bien ciblé face à une modification de la politique de vente d'un produit.

8. Courbe de vie d'un produit :



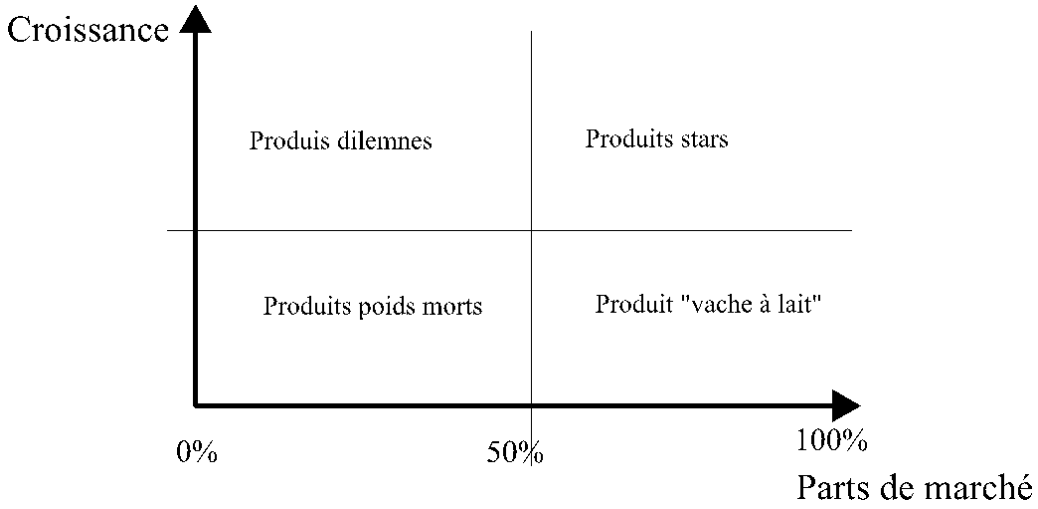
phase 1 : phase de lancement du produit sur le marché. Le succès de cette phase est dû aux "innovateurs" (2-3%) qui sont des personnes achetant systématiquement le dernier produit sorti sur le marché. Nécessite un gros travail sur le produit.
phase 2 : phase de développement. Après le succès de la phase de lancement. Les consommateurs de cette phase sont les "suiveurs" (10-15%). Cette phase s'appuie sur un gros travail publicitaire.
phase 3 : phase de maturité. Au début de cette phase, on rencontre la majorité précoce (35%) et la majorité tardive (35%). Ici on travaille les prix et la distribution.
phase 4 : phase de déclin. C'est la phase des retardataires (10-15%)

Remarque : dans un cas de produit de grade consommation, la courbe de vie a plutôt tendance à ne pas avoir de phase de déclin.

9. Les objectifs publicitaires sont très variés :

- On peut choisir de faire connaître un produit
- On peut choisir de faire connaître une marque, de donner une certaine image à la marque et donc ainsi à tous les produits de cette gamme.

10. Le modèle du Bostob Consulting Group consiste à mettre en rapport la croissance d'un produit avec ses parts de marché. On distingue 4 groupes :



- Les produits stars : à haute croissance et à grande part de marché. Ils nécessitent beaucoup de liquidités pour pouvoir les maintenir (concurrence forte car produits qui rapportent)
- Les produits vache à lait : à grande part de marché et à croissance peu importante. Ce sont des produits qui sont les plus rentables car ils ne nécessitent pas beaucoup de financement. Comme ils n'ont pas une forte croissance, les concurrents hésitent à créer des produits de même type.
- Les produits dilemmes : à forte croissance mais à parts de marché faible. Ils nécessitent beaucoup de financement pour devenir des produits stars. Sinon on peut les abandonner, ils deviennent alors
- Des produits points morts : à faible croissance et faibles parts de marché. Ces produits ne rapportent rien. On peut se poser la question de les conserver (image de marque) ou pas

Une entreprise doit avoir des produits dans chaque catégories pour être équilibrée.

Module : Droit (DR11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Aucun

Sujet

I/ Vous êtes cadre supérieur dans une SSII, Info P Blue et vous négociez avec un client, une entreprise qui renouvelle en partie son parc informatique. Votre équipe présente un contrat-type, pré rédigé. Le client cherche à obtenir des clauses précisant le degré de fiabilité technique, mais votre société refuse de s'engager dans ce sens.
Le contrat-type contient la clause suivante : "Info P Blue est exonérée de tout dommage survenant de son fait aux produits et services délivrés au client". Le contrat est conclu. Est-il conforme aux normes juridiques ? Justifiez votre position.
Après la signature de ce contrat de vente et au moment de la livraison, des agents des deux sociétés s'aperçoivent que l'interopérabilité n'est pas toujours possible. Cette situation s'explique par une erreur apparue dans la convention. Quelles solutions s'offrent à vous et au client ? Explicitez.

II/ Après la remise de votre dernier rapport de stage à l'INT, l'entreprise qui a bénéficié de votre compétence vous offre un poste. Dans un flux de l'emploi tendu et bien que vous n'ayez pas été totalement convaincu(e) par la politique managériale de cette société, vous signez une promesse d'embauche. vous n'en continuez pas moins à multiplier les entretiens. Vous décidez de ratifier un contrat de travail avec une autre société qui vous propose un travail plus épanouissant. Ne courez vous aucun risque?
Après un début d'exécution du contrat de travail, vous prenez connaissance de la convention collective et réalisez que vous êtes rémunéré(e) au forfait. Que vous inspire cette découverte?
Deux ans plus tard, vous démissionnez et relisez la clause de non-concurrence dont vous n'aviez pas pris la peine de prendre connaissance : "Le salarié ne pourra exercer une activité d'ingénierie de système d'information dans une entreprise concurrente, pendant une durée d'un an dans l'ensemble de la Communauté européenne et aux E.U.A". Que pensez-vous de cet accord? Explicitez.

III/ Vous conduisez une voiture de service de votre société. Vous avez participé à un déjeuner de travail et vous n'avez pas refusé l'excellent vin qui rendait plus aisé le brillant exercice de vos neurones en pleine effervescence. en sortant de table, vous supputez que vous avez dépassé le taux d'alcoolémie autorisé mais vous négligez ce détail parce que vous êtes certain(e) de maîtriser votre véhicule. A un croisement, un enfant traverse dans un passage protégé sans regarder autour de lui ; vous ne parvenez pas à l'éviter. L'enfant est sérieusement blessé. La police, prévenue, constate que votre taux d'alcoolémie est trop élevé. Une enquête est ouverte. Des mises en examen sont envisagées. Qui risque d'être poursuivi ? devant quel tribunal le jugement sera-t-il prononcé ? Explicitez.

IV/ Votre société réalise des bénéfices mais s'estime contrainte de faire évoluer la technologie, ce qui implique une réduction de personnel, un licenciement économique important, la mise en place 'un plan social. Vous êtes licencié(e). Vous décidez de profiter de cette circonstance pour réaliser un rêve : visiter la Birmanie et deux autres pays asiatiques. A votre retour, un courrier vous informe que votre ancienne entreprise, dans le cadre de la priorité de réembauchage, vous offre un nouvel emploi, moins bien payé et sis dans un pays qui ne vous attire guère. Quelle décision prenez-vous ? Explicitez.

V/ Vous avez créé une société de CD-rom. Vous avez acheté un fonds de commerce mais vous êtes le locataire d'une partie d'un immeuble. Vous développez vos produits et obtenez des succès. Au bout de 3 ans, votre CA baisse : des concurrents ont lancés des produits voisins des vôtres. Pour pallier cet inconvénient, vous décidez d'adjoindre à votre activité initiale un volet "jeux vidéo". devez-vous demander l'autorisation du bailleur ?
Deux ans plus tard, vous constatez que votre société n'est plus viable. Afin d'éviter le dépôt de bilan, vous changez d'activité : votre devise est "vivre l'aventure en pleine ville"(Votre catalogue est diversifié : "Attaque à main armée", "Survivre à un naufrage", etc.). vous pensez attirer une clientèle

de cadres stressés. Ce commerce est bruyant. Or l'immeuble où votre imagination entend faire merveille se trouve près du Jardin du Luxembourg. Demandez-vous l'autorisation du bailleur ? Quelle sera sa réaction ? Explicitez.

VI/ Votre société d'informatique entend se débarrasser de ses vieux logiciels en organisant des soldes. Doit-elle se plier à certaines règles ? si oui, lesquelles ?Le responsable de l'opération n'a pas mentionné la date limite des ventes. Il veut s'adapter au marché. Son initiative est-elle conforme aux normes juridiques ? Explicitez.

VII/ Vous achetez un produit par voie électronique sur un site américain destiné essentiellement au public anglo-saxon, avec des messages interstitiels publicitaires et des contrats en anglais. L'envoi d'une notice explicative en anglais, dans ce cas précis, déroge-t-il aux dispositions légales ? Justifiez votre réponse.

UV Electronique

Module : QCM (SF11)
Durée : 45mns
Documents autorisés : Aucun

Sujet

1. Dans un semi-conducteur dopé P, les porteurs majoritaires sont des :
   a. électrons
   b. trous
   c. ions positifs issus du dopant

2. Dans la zone de charge d'espace, la charge fixe est constituée par :
   a. les porteurs majoritaires
   b. les porteurs minoritaires
   c. les ions issus des dopants

3. Dans un semi-conducteur, la diffusion des porteurs est due à l'existence entre deux zones de :
   a. un gradient de température
   b. un gradient de concentration
   c. un gradient de volume

4. Dans une jonction PN:
   a. L'anode est la zone N
   b. La cathode est la zone P
   c. L'anode est la zone P

5. Une diode au Silicium parcourue par un courant de 10mA offre une résistance dynamique de :
   a. 26Ω
   b. 2,6Ω
   c. 26kΩ

6. Un transistor à effet de champ se commande par :
   a. un courant
   b. une tension
   c. une résistance

7. Un transistor à effet de champ régi par l'approximation parabolique :
   a. prend une forme conique
   b. a sa tension Vgs qui dépend du carré du courant Id
   c. a son courant Id qui dépend du carré de la tension Vgs

8. Un amplificateur opérationnel auto-compensé possède :
   a. une fréquence de coupure basse très élevée
   b. une fréquence de coupure haute très basse
   c. une fréquence nominale intermédiaire

9. Un système bouclé est :
   a. un système qui ondule
   b. un système qui assure une stabilité inconditionnelle
   c. un système qui possède une boucle reliant la sortie à l'entrée

10. Un condensateur se comporte comme :
   a. un court circuit à fréquence nulle
   b. un circuit ouvert à fréquence infinie
   c. un court circuit à fréquence infinie

11. Dans un condensateur en régime d'impulsion, lors du changement d'état, il y a:
   a. conservation du courant I
   b. conservation de la charge Q
   c. conservation de la tension V

12. Le circuit de polarisation est obtenu en :
   a. court-circuitant les sources de tension continue
   b. remplaçant les condensateurs par des circuits ouverts
   c. remplaçant les condensateurs par des circuits fermés

13. Le schéma équivalent dynamique petits signaux d'un circuit amplificateur à transistors s'obtient en:
   a. ouvrant les sources de tension continues
   b. court-circuitant les sources de tension continues
   c. remuant le circuit

14. Au voisinage de la fréquence de coupure haute d'un amplificateur, les capacités prépondérantes sont:
   a. les capacités de liaison
   b. les capacités internes (de jonction) des circuits actifs
   c. les capacités de découplage

15. Le théorème de Miller permet de:
   a. remplacer un quadripôle par un dipôle
   b. accroître le réalisme de la stabilisation capacitive
   c. remplacer une capacité de rétroaction par deux capacités en dérivation

16. Un système stable est décrit dans le plan de Nyquist par une courbe représentant l'évolution de la transmittance en boucle ouverte ($A^*\beta$) tracée pour des fréquences croissantes, qui :
   a. entoure le point critique
   b. n'entoure pas le point critique
   c. passe par le point critique

17. Un amplificateur différentiel fonctionne en régime linéaire:
   a. dans une faible plage de tension E centrée sur l'origine
   b. dans une plage infinie de tension
   c. pour un courant de référence quasi statique

18. Un oscillateur sinusoïdal de type Colpitts est constitué d'un amplificateur et d'un circuit de retour qui comprend :
   a. trois cellules RC passe bas
   b. une self et deux capacités
   c. un quartz et deux capacités

19. Un signal sinusoïdal module en fréquence a un spectre constitué de:
    a. une seule raie à la fréquence porteuse
    b. une infinité de raies contiguës d'amplitude croissante
    c. de raies dont l'amplitude dépend de l'indice de modulation

20. Un dispositif permettant de moduler la fréquence d'un oscillateur sinusoïdal est :

    a. une résistance à capacité variable
    b. une diode a capacité variable
    c. une fréquence à capacité variable

Corrigé

1	b	6	b	11	b	16	b
2	c	7	c	12	b	17	a
3	b	8	b	13	b	18	b
4	c	9	c	14	b	19	c
5	b	10	c	15	c	20	b

Module : Système et fonctions électroniques (SF11)
Durée : 1h30
Documents autorisés : Tous

Sujet

EXERCICE 1

1. Effectuer la synthèse du dipôle LC défini par son impédance $Z_1(p)$ selon la méthode de Cauer "décroissant" :

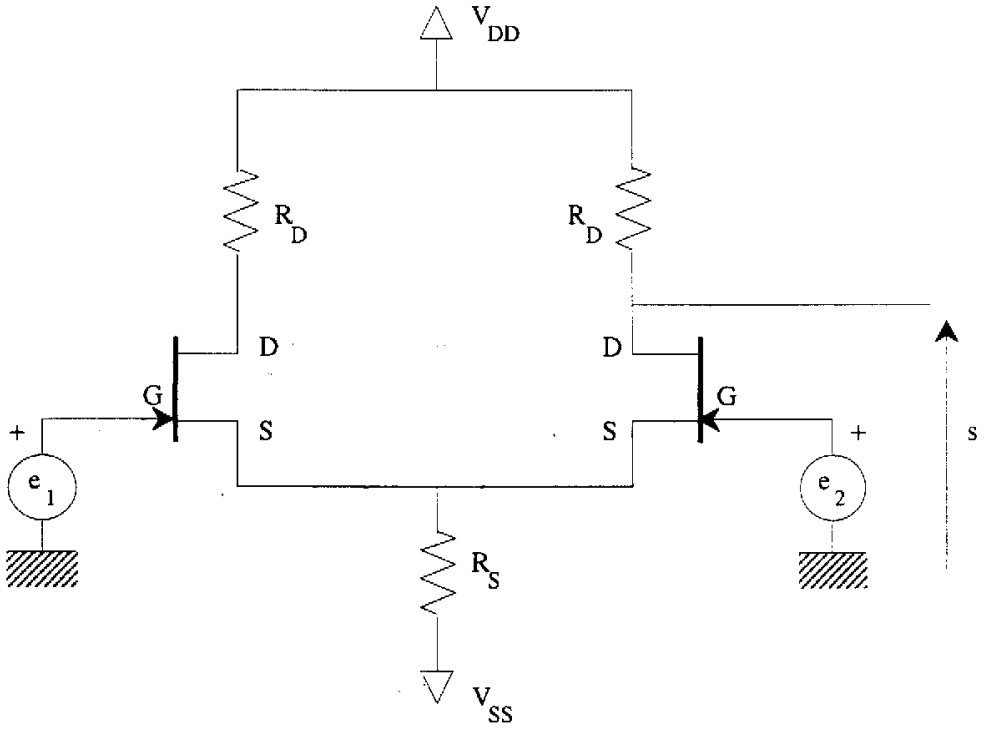
$$Z_1(p) = \frac{(3p^2+32)(p^2+2)}{8p(p^2+10)}$$

2. Effectuer la synthèse du dipôle LC défini par son impédance $Z_2(p)$ selon la méthode de Cauer "croissant" :

$$Z_2(p) = \frac{p(p^2+4)}{3p^2+8}$$

EXERCICE 2

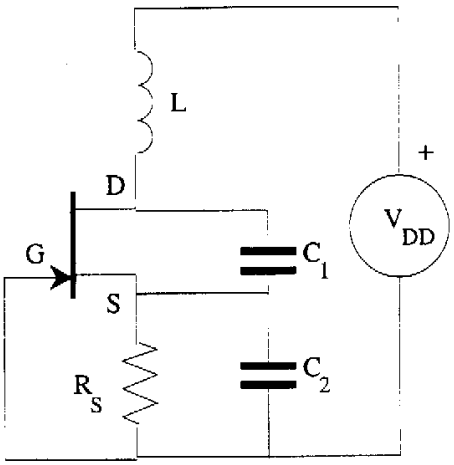
On considère le montage suivant :



Ce montage est celui d'un étage amplificateur à deux entrées e_1 et e_2 et une sortie s.

EXERCICE 3

On considère le montage oscillateur suivant faisant intervenir un transistor à effet de champ canal N dont les caractéristiques sont identiques à celle des transistors de l'exercice 2. Le montage est alimenté par la source de tension continue V_{DD} = 15 V et on suppose que le transistor est en régime de fonctionnement "normal".



1. On désire que le transistor soit polarisé au point de repos défini par :

$$V_{GS} = -3 \text{ V}$$

Donner la valeur du courant I_D circulant dans le transistor et la valeur de la tension V_{DS}
Déterminer alors la valeur de la résistance R_S

2. Donner le schéma équivalent de l'oscillateur en régime de variations.

3. En déduire les conditions d'oscillation du montage.

Corrigé

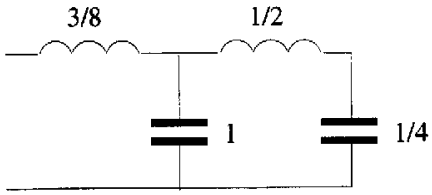
EXERCICE 1

• $Z_1(p) = \dfrac{(3p^2+32)(p^2+2)}{8p(p^2+10)}$

$$Z_2 = Z_1 - \frac{3p}{8} = \frac{p^2+8}{p(p^2+10)}$$

$$Y_3 = Y_2 - p = \frac{2p}{p^2+8}$$

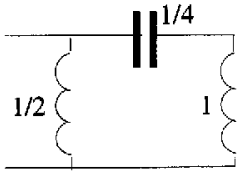
$$Z_4 = Z_3 - \frac{p}{2} = \frac{4}{p}$$



• $Z_2(p) = \dfrac{p(p^2+4)}{3p^2+8}$

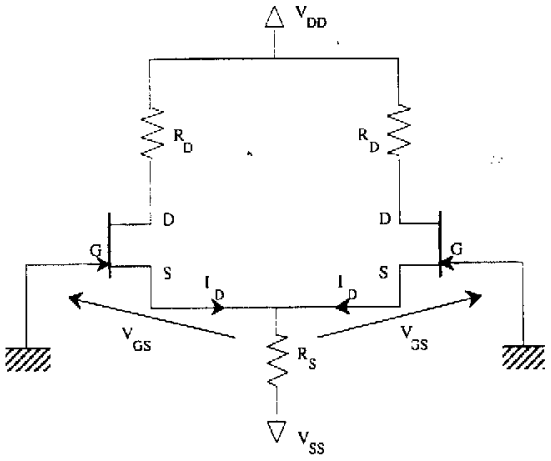
$$Y_3 = Y_2 - \frac{2}{p} = \frac{p}{p^2+4}$$

$$Z_4 = Z_3 - \frac{4}{p} = p$$



EXERCICE 2

1.1. Le schéma est régime de polarisation est le suivant :



Le montage étant symétrique, les courants drain et les tensions V_{GS} sont identiques pour les deux transistors.

$$V_{GS} + 2\ R_S I_D + V_{SS} = 0$$

1.2. La relation précédente donne :

$$I_D = -\frac{V_{SS}+V_{GS}}{2R_S}$$

En considérant la caractéristique des transistors : $I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_p}\right)^2$, on obtient l'équation :

$$\frac{V_{GS}^2}{V_p^2} - \frac{2V_{GS}}{V_p} + \frac{V_{GS}}{2R_S I_{DSS}} + 1 = 0$$

dont les racines sont : $V_{GS} = -2$ V et $V_{GS} = -9{,}5$ V

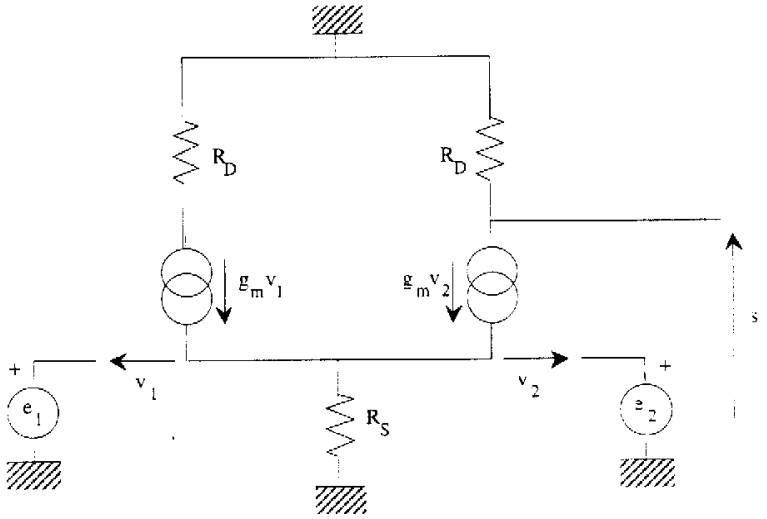
La valeur à retenir est la première et on a alors :

$\boxed{V_{GS} = -2\ V}$ $\boxed{I_D = 2\ mA}$

1.3. $V_{DS} = V_{DD} - R_D I_D + V_{GS}$ $\boxed{V_{DS} = 12\ V}$

Les transistors fonctionnent donc bien en régime normal.

2.1. Le schéma équivalent du montage en régime de variations est le suivant :



$$g_m = -\frac{2I_{DSS}}{V_p}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_p}\right) \qquad \boxed{g_m = 2\ mS}$$

2.2. $e_1 = v_1 + g_m R_S (v_1+v_2)$

$e_2 = v_2 + g_m R_S (v_1+v_2)$

$s = -g_m R_D v_2$

$\Rightarrow$ $\boxed{s = \frac{g_m R_D}{1+2g_m R_S}\{g_m R_S e_1 - (1+g_m R_S) e_2\}}$

2.3. $s = A_d\left(\frac{e_1-e_2}{2}\right) + A_c\left(\frac{e_1+e_2}{2}\right) = \frac{A_d+A_c}{2} e_1 + \frac{A_c-A_d}{2} e_2$

$\boxed{A_d = g_m R_D}$ $\qquad$ $\boxed{A_c = -\frac{g_m R_D}{1+2g_m R_S}}$

$\boxed{A_d = 10}$ $\qquad$ $\boxed{A_c = -1,11}$

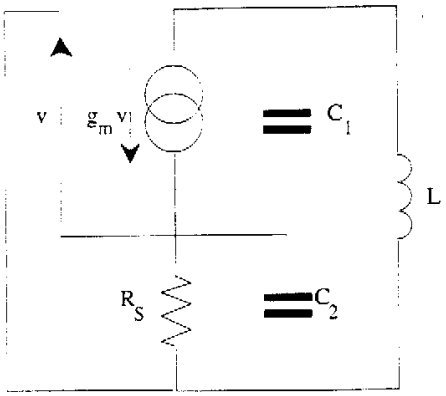
EXERCICE 3

1. $I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_p}\right)^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_D = 0,5\ mA}$

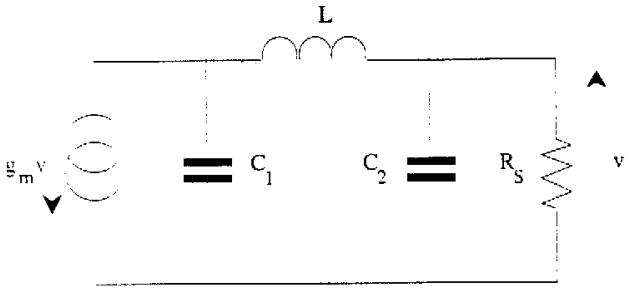
$V_{DS} = V_{DD} + V_{GS}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_{DS} = 12\ V}$

$V_{GS} = -R_S I_D$ $\Rightarrow$ $\boxed{R_S = 6\ k\Omega}$

2. En régime de variations, le schéma de l'oscillateur est le suivant :



3. Redessinons le schéma précédent :



Exprimons la tension v :

$$v = \frac{g_m R_S v}{jR_SC_1\omega+(1-LC\omega^2)(1+jR_SC_2\omega)}$$

Si le montage se comporte comme un oscillateur, la tension v est non nulle et l'on a alors :

$$\frac{g_m R_S}{jR_SC_1\omega+(1-LC\omega^2)(1+jR_SC_2\omega)} = 1$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve, ω_0 désignant la pulsation des oscillations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}} \qquad g_mR_S = LC_1\omega_0^2-1 = \frac{C_1}{C_2}$$

UV Réseau

Module : Introduction aux télécommunications (IT11)

Durée : 1h30

Documents autorisés : Tous

Sujet

Exercice 1 (3 points)

On désire multiplexer 6 voies BV transmettant des caractères de 8 bits avec les débits binaires 100, 100, 100, 200, 200 et 300 bits par seconde. En utilisant la technique de multiplexage temporel par caractère, un IT peut être affecté, soit à la voie la plus rapide, soit à la voie la plus lente.

1. En considérant ces deux modes d'affectation des IT, donner la structure de la trame HV et le débit de la voie HV dans les cas d'une signalisation en bande et hors-bande.
2. Discuter les avantages et inconvénients de chacune des trames HV obtenues en terme d'efficacité de multiplexage.

Exercice 2 (5 points)

Soit la matrice P associée à un code linéaire :

1	0	1
1	1	1
1	1	0
0	1	1

1. Quels sont la longueur, la dimension et le rendement de ce code linéaire ?
2. En déduire la matrice de contrôle de parité.
3. Etablir les expressions permettant la génération des mots de code.
4. Calculer l'ensemble des mots de codes générés.
5. Montrer que ce code linéaire est un code cyclique et donner le polynôme générateur correspondant.

Exercice 3 (3 points)

Dans une transmission de caractères, la détection des erreurs est réalisée à l'aide du polynôme générateur : x^4+x+1. Soit 1010110111, la suite binaire reçue par le destinataire, le bit de gauche représentant le bit de poids fort.

1. Donner la forme polynomiale du message reçu.
2. Effectuer la procédure permettant au destinataire de vérifier la bonne transmission. Que peut-on en déduire ?
3. Donner l'information utile envoyée par l'émetteur. Justifier votre réponse.

Exercice 4 (3 points)

Canal D du RNIS :

1. Quelle technique de commutation est utilisée?
2. Quelles en sont les fonctions actuelles?
3. Quelle offre supplémentaire propose France Télécom pour le 2ème semestre 1999?

Signalisation

1. Quels sont les deux types de signalisation existants?
2. Soient 2 abonnés a et b raccordés respectivement à deux commutateurs de rattachement CAA_a et CAA_b. Quand a appelle b, quel est celui des deux commutateurs qui libère les circuits lorsque :
   - a raccroche en premier?
   - b raccroche en premier?

Exercice 5 (6 points)

Une entreprise souhaite faire l'acquisition d'un nouveau PABX. Afin de dimensionner au mieux cet équipement, elle réalise une étude de trafic dont les résultats sont les suivants :

Trafic téléphonique par poste à l'heure chargée (en Erlang)

	Nombre	Trafic départ (par poste)	Trafic arrivée (par poste)
Postes à fort trafic	20	0,2	0,3
Postes à faible trafic	400	0,02	0,08

1. Calculer le nombre de points de sortie de ce PABX sachant que le taux de perte doit être de 0,05.
2. Les appels départ de l'entreprise passent par des standardistes. Combien d'appels auront-elles à traiter si on estime que la durée moyenne d'un appel est de 3 minutes.
3. Une standardiste sera occupée en moyenne 25 secondes pour transférer un appel. Combien de standardistes doit-on prévoir au minimum?
4. Calculer alors la probabilité d'attente et les temps moyens d'attente.

Corrigé

Exercice 1

1.

- Affectation à la voie lente :

On a alors d = 100 bit/s

et 10 IT se partagent ainsi :
voie 1 : 1 IT voie 2 : 1 IT voie 3 : 1 IT voie 4 : 2 IT voie 5 : 2 IT voie 6 : 3IT

+ 1 IT de verrouillage (V)

- dans le cas en bande :
On a 1 IT de signalisation (S)

V 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 S

Soit en tout 12 IT (de 8 bits)

ce qui donne :
D = 8x12xd = 9600 bit/s
e = 10x8/8x12 = 0,83

- dans le cas hors-bande
On supprime l'IT de signalisation, mais il y a 1 bit de signalisation accolé à chaque IT, d'où

V 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Soit en tout 11 IT (de 9 bits)

ce qui donne :
D = 9x11x100 = 9900 bit/s
e = 8x10/9x11 = 0,808

- Affectation à la voie rapide :

On a alors d = 300 bit/s

dans ce cas on a 1 IT par voie
+1 IT de verrouillage de trame

- dans le cas en bande :
On a 1 IT de signalisation (S)

V 1 2 3 4 5 6 S

Soit en tout 8 IT de 8 bits

ce qui donne :
D = 8x8x300 = 19200 bit/s
e = 0,75

- dans le cas hors-bande :
On a 7 IT de 9bits

V 1 2 3 4 5 6
Soit en tout 7IT de 9 bits

ce qui donne :
D = 7x9x300 = 18900 bit/s
e = 0,76

2. On a calculé à chaque fois l'efficacité :
qu'on soit en affectation selon la voie lente ou en affectation selon la voie rapide, on note que l'efficacité en bande et celle hors-bande sont sensiblement les mêmes (avec une efficacité meilleure en bande pour l'affectation selon la voie lente et une efficacité meilleure hors-bande pour l'affectation selon la voie rapide)
On note que, de manière générale, ici, l'efficacité est meilleure lorsque l'on utilise l'affectation selon la voie lente.

Exercice 2

1. Longueur de ce code linéaire = 7 = n
   Dimension = 4 = m
   Rendement = 4/7 = 0,57

2. Matrice de contrôle de parité:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. On a ${}^tY{}^tH = 0$, d'où les équations :

$$\begin{cases} x_5 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_6 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_7 = x_1 + x_2 + x_4 \end{cases}$$

4. On trouve

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

5. Matrice Génératrice :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donc sous sa forme polynomiale :

$$G = \begin{bmatrix} x^6 + x^2 + 1 \\ x^5 + x^2 + x + 1 \\ x^4 + x^2 + x \\ x^3 + x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^3 + x + 1)(x^3 + 1) \\ (x^3 + x + 1)(x^2 + 1) \\ (x^3 + x + 1)x \\ (x^3 + x + 1) \end{bmatrix}$$

le polynôme générateur est donc $(x^3 + x + 1)$

Exercice 3

Polynôme générateur : x^4+x+1
Suite binaire reçue : 1010110111

1. Forme polynômiale du message reçu : $x^9+x^7+x^5+x^4+x^2+x+1$
2. Pour vérifier la bonne transmission, on doit effectuer une division euclidienne de la forme polynomiale du message reçu par le polynôme générateur. Le reste de cette division sera important car il constituera le moyen de vérification :

Effectuons la division :

x^9	$+x^7$		$+x^5$	$+x^4$		$+x^2$	$+x$	$+1$	x^4+x+1
$-(x^9$		$+x^6$	$+x^5)$						$x^5+x^3+x^2$
	x^7	$+x^6$		$+x^4$		$+x^2$	$+x$	$+1$	
	$-(x^7$			$+x^4$	$+x^3)$				
		x^6			$+x^3$	$+x^2$	$+x$	$+1$	
		$-(x^6$			$+x^3$	$+x^2$			
							x	$+1$	

Donc R(x) = x+1

Exercice 4

Canal D du RNIS

1. C'est la technique de commutation de paquets qui est utilisée
2. Fonctions actuelles :
   -signalisation usager-réseau
   -accès aux réseaux paquets (Transpac)
3. Un accès Internet via le canal D va être proposé par France Télécom grâce à une signalisation supplémentaire.

Signalisation

1. Signalisation sémaphore code 7 entre commutateurs et signalisation voie par voie (= la signalisation passe par le même circuit que la communication)
2. Lorsque a appelle b :
   -si a raccroche en premier, c'est le CAAa qui libère les circuits
   -si b raccroche en premier, c'est aussi le CAAa qui libère les circuits

Exercice 5

1. Taux de perte = 0,05

   Pour un poste à fort trafic :
   Trafic = Trafic_Départ+Trafic_Arrivee = 0,5 E
   Trafic pour les 20 postes à fort trafic = 20x0,5 = 10 E

   Pour un poste à faible trafic :
   Trafic arrivée + départ = 0,02+0,08 =0,1
   Comme il y a 400 postes :
   Trafic offert = 400x0,1 = 40 E
   Donc, le trafic offert total est 40+10 = 50 E

   D'après les courbes de trafic, Nb de points de sortie de ce PABX = 55 organes

2. Durée moyenne d'un appel = h = 1/20 heure (3 minutes)
   On a T_0' (trafic départ)=λh T_0'= 20x0,2 + 0,02x400 = 12 E

   Donc $\lambda = \dfrac{12}{1/20}$

Donc nombre d'appels à traiter = 240 à l'heure chargée

3. Une standardiste : 25s pour transférer un appel
   Trafic offert aux standardistes = T_0'' = 240x25/3600 = 1,66 E
   En une heure, une standardiste peut effectuer 3600/25 = 144 appels.
   Or il faut en réaliser 240. Il faut donc au moins 2 standardistes.

4. Probabilité d'attente (on utilise à nouveau les courbes de trafic) : N = 2, T_0'' = 1,66 E
   Donc p = 0,5 = 50%
   Les temps moyens d'attente sont :
   $$t = \frac{h}{N - T_0''}$$
   t = 73,5s (pour 1 appel)

   Pour l'ensemble des appels :
   t' = p x t = 0,1 x 73,5 = 7,35s

Module : Introduction aux télécommunications (IT11) (rattrapage)

Durée : 1h

Documents autorisés : Tous

Sujet

1ère partie

Une entreprise est reliée au réseau extérieur par l'intermédiaire d'un PABX. Pour dimensionner le nombre de points de sortie, une étude de trafic a été faite. Celle-ci a donné les résultats suivants: le trafic est estimé en Erlang.

	8h - 9h	9h - 10h	10h - 11h	11h - 12h	12h - 13h	13h - 14h	14h - 15h	15h - 16h	16h - 17h	17h - 18h	18h - 19h
Administration	20	30	20	30	20	30	40	35	40	20	10
Services divers	50	20	5	20	30	40	20	10	10	45	50
Bureaux d'études	10	20	10	10	20	20	10	15	10	45	10

La durée moyenne d'une communication est de 2 minutes.

1- On désire dimensionner ces points de sortie pour satisfaire le trafic à l'heure chargée.

- Déterminer l'heure la plus chargée.
- Quel est alors le trafic offert ?
- Quel doit être alors le nombre de points de sortie sachant que l'on se fixe une probabilité de perte $p \leq 0.05$?

2- Certains appels arrivée passent par le standard où une opératrice met 20 secondes pour aiguiller un appel vers le bon correspondant.

- Calculer le nombre d'appels traités par le standard sachant que ce dernier traite 10% des appels du trafic arrivée et que le trafic arrivée constitue 50% du trafic total (on considérera toujours le trafic à l'heure chargée).
- Quel est le trafic offert au standard ?
- Quel nombre minimal de standardistes doit-on prévoir pour faire face à cette demande ?
- Afin de bien écouler le trafic, on surdimensionne en rajoutant à ce nombre minimal une standardiste supplémentaire. Quelle sera alors la probabilité d'attente et le temps moyen d'attente pour un appel qui attend ?

2ème partie

1- Soit la matrice P associée à un code linéaire : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Quels sont la longueur, la dimension et le rendement de ce code linéaire ?
- En déduire la matrice de contrôle de parité H et la matrice génératrice G.
- Etablir les expressions permettant la génération des mots de code.
- Calculer l'ensemble des mots de codes générés.

2- Dans une transmission de caractères de 8 bits, la détection des erreurs est réalisée à l'aide du polynôme générateur $x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$

Soit à transmettre le caractère suivant: 0 1 0 0 1 1 0 1, où le bit de gauche représente le bit de poids fort.

- Quelle est la forme polynomiale du message à émettre ?
- Effectuer la procédure permettant la génération de la séquence de contrôle et donner la représentation binaire du mot de code émis.
- Quel est le rendement de ce code polynomial ? Comment peut-on l'améliorer ?

Module : Transport de l'information (TI11)
Durée : 1h30
Documents autorisés : Aucun

Sujet

1. Dialogue X25 (11 points)

On considère trois ordinateurs A, B et C abonnés à un réseau X25 comme par exemple Transpac. On notera P_A, P_B et P_C et les commutateurs de rattachement respectifs (points d'accès ou "ETCD").
Les machines A, B et C désirent faire des transferts d'information décrits ci-après, on s'intéresse dans ce problème à l'ensemble des échanges protocolaires des différentes couches entre les ordinateurs A et B et les points d'accès au réseau X25 P_A et P_B
La machine A ouvre une connexion avec B, B envoie un message MSG_1 de 300 octets à A puis B ouvre une connexion vers C et envoie un message MSG_2 de 300 octets à C. A la réception de MSG_1, la machine A envoie à B un message en réponse REP_1 de 100 octets, puis A ferme la connexion avec B. On suppose que l'envoi de MSG_2 est effectué avant la réception de REP_1.

Ainsi A va successivement :

- Ouvrir une connexion X25 de A vers B,
- Recevoir le message MSG_1 de B (300 octets),
- Envoyer la réponse REP_1 (100 octets),
- Fermer la connexion X25 entre A et B.

La machine B va successivement :

- Accepter la connexion avec A,
- Envoyer le message MSG_1 à A (300 octets)
- Ouvrir une connexion X25 de B vers C,
- Envoyer le message MSG_2 à C (300 octets)
- Recevoir la réponse REP_1 de A (100 octets)
- Recevoir la déconnexion de A

La machine C va accepter la connexion de B et recevoir MSG_2 .

En terme de primitive de service sur la couche réseau :

- A génère un **N-CON-REQ**(B), puis un **N-DATA-REQ**(B, REP_1) après l'indication **N-DATA-IND**(B, MSG_1), et enfin un **N-DISC-REQ**(B)
- B génère un **N-CON-RESP**(A) pour accepter la connexion venant de A, puis un **N-DATA-REQ**(A, MSG_1). B génère ensuite un **N-CON-REQ**(C), puis un **N-DATA-REQ**(C, MSG_2).

L' indication **N-DATA-IND**(A, REP_1) sur B a lieu après les 2 requêtes précédentes.

On suppose de plus que :

- La taille des paquets entre A et P_A est de 128 octets pour chaque sens de transmission. (NB : il s'agit de la taille maximum des champs de données utilisateur dans les paquets de données.)
- La taille des paquets entre B et P_B est de 512 octets pour chaque sens de transmission.
- Les fenêtres d'anticipation sont toujours W=2 pour les couches 2 et 3 dans chaque sens.
- Les stratégies d'acquittement au niveau de la couche réseau sont d'envoyer un paquet "Receive Ready" pour chaque paquet de données.
- Tout se passe au mieux : il n'y a pas d'incident de transfert, pas de saturation (pas besoin d'attendre pour acquitter), les trames et les paquets sont envoyés **dès que possible**.
- Les connexions HDLC ont déjà été établies, et la première trame d'information HDLC envoyée par la machine B dans notre scénario aura la forme INFO N(S)=4, N(R)=6.

- Si vous avez besoin d'hypothèses supplémentaires, les choix sont libres à condition de les énoncer.

1. Préliminaires

   a. Quelles sont, à priori, les couches du modèles OSI implantées dans les différents équipements A, P_A, B et P_B ? Justifier.
   b. Qu'est ce qui permet de supposer que B peut envoyer MSG_2 à C avant d'avoir terminé le dialogue avec A? Quelle est la fonction X25 mise en œuvre et comment X25 réalise-t-il cette fonction?
   c. Le protocole X25 peut mettre en œuvre de la segmentation. Pourquoi et comment est-ce réalisé par X25?
   d. Qu'est ce que la notion de fenêtre dans un protocole? Donner sous forme d'un chronogramme un exemple pour W=2 en indiquant les contraintes liées à la fenêtre.

2. Représenter sous forme d'un chronogramme l'ensemble des paquets échangés par le protocole X25.3 entre A et P_A et entre B et P_B . Représenter de plus en pointillé les dépendances existantes entre les événements des deux liaisons de données (acheminement à travers le réseau). Représenter enfin **toutes** les primitives de service échangées entre la couche réseau et son utilisateur pour les deux machines A et B.

   On utilisera et on notera les paquets : D p(s),p(r),M=x, S=y pour les paquets de données avec x la valeur du bit M (More Data) et y le nombre d'octets de données, P-RR p(r) pour le paquet "Receive Ready", CALL, CALL CONF, CLEAR, CLEAR CONF pour les paquets d'établissement et de libération du circuit virtuel.

3. Uniquement pour la liaison entre B et P_B, représenter les trames HDLC échangées pour notre scénario.

   On utilisera et on notera les trames : I n(s),n(r) [data] pour les trames d'information où data décrit les données de la trame, RR n(r) pour la trame "Receive Ready".

   On rappelle que l'énoncé impose que la première trame d'information envoyée par B soit de la forme **I**4,6[..].

   Pour les compteurs, on rappelle que S (send) identifie le "numéro de l'information envoyée" et R (receive) identifie le "numéro de la prochaine information attendue".

2. Commutation (4 points)

1. Qu'est ce que la commutation dans un réseau téléinformatique ? Indiquez les techniques de commutation que vous connaissez et donnez leurs intérêts (et inconvénients) respectifs.
2. Quels sont les principaux critères de comparaison qui vous semblent utiles pour un utilisateur qui désire choisir entre différents types de commutation?
3. Quelle(s) technique(s) de commutation vous semble la plus adaptée pour chacune les applications suivantes : distributeur carte bleu, visioconférence, messagerie électronique, télévision interactive, partage de fichiers sur un réseau local, Web. Pourquoi ?

3. Questions rapides (5 points)

Définir la classe B dans l'adressage IP? Que signifie le masque 255.255.224.0 pour des adresses de classe B ?
Quel est le rôle de la couche présentation dans le modèle OSI ?
Les temporisateurs de reprise sont fixes (ou statiques) dans HDLC et variables (ou dynamiques) dans TCP. Pourquoi cette différence entre la couche 2 et la couche 4 ?
Qu'est ce qu'un PAD (X3) dans un réseau X25? Quel lien avec le bit Q ?
A quoi sert le champ TTL (Time To Live) dans un datagramme IP?

Module : Transport de l'information (TI11) (rattrapage)
Durée : 1h
Documents autorisés : Aucun

Sujet

1 Mécanismes de reprise sur erreur dans un protocole

Le but est de décrire les mécanismes utilisés pour fiabiliser le transfert d'informations dans des protocoles comme HDLC, X25 niveau 3 ou autres. Le protocole considéré doit assurer le séquencement total des informations acheminées et utilise la numérotation et l'acquittement des messages sous la même forme que HDLC.

Appuyez-vous sur des exemples et des chronogrammes d'échange pour répondre.

1.1 Quelles sont, au niveau d'une liaison de données, les différentes causes d'erreur dans l'acheminement d'un message entre 2 ETTDs? Comment sont détectées ces erreurs dans le protocole?

1.2 On considère un échange où il n'y a qu'un message utilisateur à transmettre entre 2 ETTDs (ou un échange avec une fenêtre égale à 1). Expliquer les mécanismes qui vont permettre d'assurer la bonne délivrance du message ou à défaut de déclarer la connexion indisponible. Décrire les différents scénarios possibles.

On a alors un risque de duplication du message. Pourquoi et comment éviter cette duplication de message?

1.3 On permet maintenant l'utilisation d'une fenêtre d'émission plus grande que 1. Quels autres mécanismes permettent de reprendre les erreurs de transfert plus efficacement quand plusieurs messages se suivent? Décrire les différents scénarios possibles.

2 Modèle OSI

2.1 Décrivez les caractéristiques et le fonctionnement d'une architecture de réseau en couche comme le modèle OSI. Définissez en particulier **avec soin** les concepts de couche, protocole, service et connexion.

2.2 Qu'est-ce que la fonction d'encapsulation associée à une architecture en couche? Illustrez par un exemple dans le cas de la norme X25.

2.3 Qu'est-ce que le multiplexage dans une architecture en couche? Comment est mis en œuvre le multiplexage dans le protocole X25 niveau paquet?

2.4 Qu'est-ce que la segmentation dans une architecture en couche? Comment est mis en œuvre la segmentation dans le protocole X25 niveau paquet? Quels sont les différences dans la segmentation réalisée par le protocole IP?

2.5 Pour chacune des 3 fonctions précédentes, quelles sont les couches du modèle OSI plus particulièrement concernées? Pourquoi?

3 Questions rapides

3.1 Quelle différence faites vous entre Saturation et Congestion dans un réseau téléinformatique?

3.2 Deux machines A et B disposent des 7 couches OSI et communiquent à travers un réseau à commutation de paquets. Les données passent par trois routeurs successifs pour aller de A à B. Un message est envoyé par une application de A et il n'y a aucune segmentation. Combien de fois au total ce message va-t-il traverser l'interface entre 2 couches du modèle OSI avant d'être délivré à une application en B? (un schéma peut suffire comme explication)

3.3 Définir la classe C dans l'adressage IP? Que signifie le masque 255.255.255.192 pour des adresses de classe C?

3.4 Quel est le rôle de la couche session dans le modèle OSI?

3.5 Qu'est ce qu'une primitive de service dans le modèle OSI? Que signifient alors "N_DATA_IND" et "T_CONNECT_CONFIRM"?

3.6 Qu'est ce que la notion de fenêtre dans les mécanismes de contrôle de flux?

3.7 Quelle est la fonction du protocole ICMP dans l'architecture TCP/IP? Indiquer des exemples d'utilisation de ce protocole.

Quelques éléments de correction, les sujets des années précédentes et les PC se trouvent sur le site http://www-lor.int-evry.fr/~pascal/Ens/

Module : Files d'attente (FA11)
Durée : 3h
Documents autorisés : Notes de cours et documents distribués

Sujet

Exercice n°1: Files avec clients impatients (la question 5, qui est un cas particulier, peut être résolue sans avoir fait la question 4)

Un des problèmes classiques dans les systèmes à file d'attente provient du fait que les clients se lassent d'attendre (comme par exemple dans les réseaux téléphoniques). Dans ce cas, ils peuvent quitter la file avant d'être servis.
On se propose d'étudier le cas d'une file d'attente simple pour laquelle les arrivées de clients sont poissonniennes de taux λ, les durées de service exponentielles de taux μ, il y a C serveurs, la discipline de service est "premier arrivé premier servi", la file a une capacité infinie et la taille de la population est infinie. On suppose que la durée de patience, c'est à dire la durée pendant laquelle les clients attendent sans être servis est exponentielle de taux γ (Fig. 1).

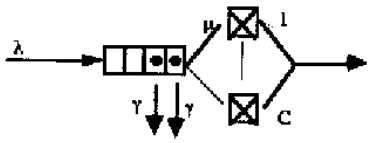


Figure 1. File d'attente avec clients impatients

1. Montrer que si k clients sont en train d'attendre (c'est à dire k+C clients dans la file dont C en train d'être servis), le taux de départ par impatience vaut $k\gamma$.
En déduire que le taux de départ de la file (par impatience ou par fin de service) vaut $k\gamma+C\mu$ si l'on a (k+C) clients dans la file et qu'il vaut $j\mu$ si l'on a j ($0<j\leq C$) clients dans la file.
2. Soit N(t) le nombre de clients dans la file à l'instant t. Montrer que le processus (N(t)) est un processus markovien de type naissance et mort (on déterminera en particulier les taux de naissance et de mort conditionnels).
3. Tracer le graphe associé à cette chaîne. Déterminer les probabilités des différents états à l'état stationnaire (la somme ne se simplifie pas ... on ne cherchera donc pas à la simplifier). Le système est-il stable ?
4. Exprimer, en fonction des probabilités des différents états,
- le nombre moyen de clients dans la file.
- le temps moyen de réponse (c'est à dire le temps moyen séparant l'arrivée d'un client dans la file de son départ à la fin d'un service ou par impatience).
- la proportion de clients qui sont réellement servis et ceux qui abandonnent (on pourra par exemple raisonner en terme de taux de départ dans les différents états de la chaîne)

(on ne demande pas ici une formulation explicite de ces différentes quantités mais une expression en fonction des probabilités stationnaires des différents états).

5. Pour simplifier les calculs, on suppose que les taux de service et de patience sont identiques ($\mu = \gamma$).
5.1 Vérifier que la chaîne est alors la même que celle d'une file M/M/∞ (nombre infini de serveurs).
5.2 Reprendre les questions 3 et 4 et déterminer les différents critères de performance.

Exercice n°2 : Performances d'un commutateur de paquet

On considère un commutateur de paquets comportant N liaisons entrantes et N liaisons sortantes. Des paquets se présentent sur les différentes entrées. Le commutateur analyse l'entête du paquet et l'émet sur une des liaisons sortantes. On peut représenter ce commutateur de la façon suivante :

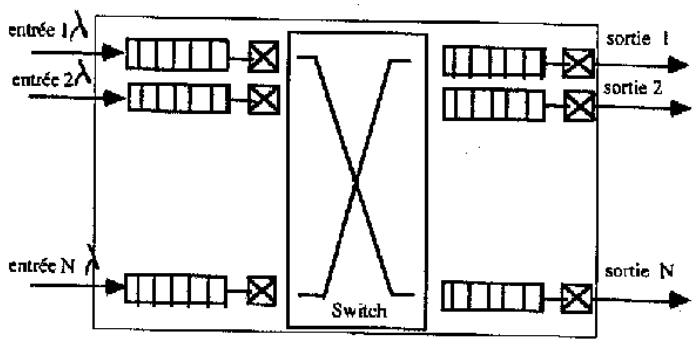


Figure 2. Commutateur de paquet

C'est une représentation "dépliée" du commutateur, une sortie correspondant à une entrée.
Des files sont positionnées en entrées du commutateur pour réceptionner les paquets. Le temps de service correspond au temps de commutation du paquet, c'est à dire le temps nécessaire pour traiter le paquet et le mettre sur la sortie désirée.
Des files d'attente sont également positionnées en sortie du commutateur pour stocker les paquets avant leur émission sur la liaison sortante. Le temps de service de telles files correspond au temps d'émission sur la liaison sortante.
On suppose que les arrivées de paquets, sur chaque liaison entrante, sont poissonniennes de taux λ (exprimé en nombre de paquets par seconde). Le temps de commutation (temps de service des files d'entrées) est supposé exponentiel de taux μ_1 (exprimé en s^{-1}). La longueur des paquets est supposée exponentiellement distribuée de taux μ (exprimé en bit^{-1}). Le débit binaire des liaisons sortantes est égal à C (exprimé en bit/s).
Les files sont supposées de taille infinie, chaque file a un serveur, la discipline de service est premier arrivé, premier servi.
On suppose que le nombre d'utilisateurs est suffisamment grand pour que les probabilités qu'un paquet soit destiné à l'une ou l'autre des sorties soient identiques. Comme un paquet ne va pas ressortir sur l'entrée par laquelle il est arrivé, il a donc une probabilité $\frac{1}{N-1}$ de se diriger vers chacune des liaisons sortantes.

1. Déterminer le débit global entrant dans le commutateur en nombre de paquets par seconde en fonction de λ, N puis en bits par seconde en fonction de λ, N et μ.
2. Quel théorème peut-on appliquer ? Pourquoi ?
3. Déterminer les nombres moyens de passage pour un paquet donné par chacune des files.
4. Quelle sont les conditions de stabilité sur les files d'entrée et de sortie ?
5. Déterminer le temps moyen de réponse du système, c'est à dire le temps qui sépare l'arrivée d'un paquet dans une file d'entrée jusqu'à son départ de la file de sortie.

Exercice n°3: Réseau informatique

On considère un réseau informatique local comportant un serveur WEB et deux disques et N stations de travail. Ce réseau est relié à l'extérieur par un lien à 2Mbytes/s.

3.1/ Le nombre de requêtes arrivant de l'extérieur forme un processus qu'on va supposer Poissonnien de débit λ. Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable?

On suppose que les utilisateurs des stations de travail ont un temps de réflexion exponentiel Z.

Une requête necessite un certains nombres de traitements effectués par le serveur, interrompus lorsque des accès aux pages qui se trouvent sur les disques sont nécessaires. Le disque D_i met en moyenne le temps S_i pour transférer une page et le nombre moyen de pages requises par une requête est e_i. On suppose que la taille des données d'une page requise est exponentiellement répartie. On suppose que le serveur WEB a un temps de service négligeable.
On prendra pour les applications numériques: S_1= 5s, S_2= 10s, $e_1 = e_2 = 10$, N=5, Z=10mn, débit λ = une requête toutes les 5 mn.

3.2/ L'administrateur envisage de donner la priorité aux accès provenant de l'extérieur.
Il veut essayer de modéliser son système afin d'étudier les performances et de le dimensionner.
Connaissez-vous un théorème qui pourra être appliqué? Pourquoi?

3.3/ Compte tenu de la priorité qu'il a imposée, les requêtes internes obtenant des temps de réponse longs, elles deviennent très rares et nous allons étudier les performances en négligeant le traffic provenant des requêtes internes.
Calculer le temps moyen de réponse d'une requête.
Pensez-vous que la charge soit bien répartie, pouvez vous proposer une amélioration?
Calculer alors le nouveau temps de réponse.

3.4/ Le trafic ayant été augmenté, (on prévoit une multiplication par n du débit initial) l'administrateur envisage d'acheter n -1 disques analogues au disque D_1 et de supprimer le disque D_2 et donc d'avoir n disques analogues à D_1. Indiquer de quelle façon répartir la charge. Calculer le temps de réponse du système.

3.5/ On revient au cas du trafic initial et à la configuration à 2 disques D_1 et D_2. On suppose qu'il y a un changement de politique. Le trafic en provenance de l'extérieur est à présent considéré comme négligeable. N devient beaucoup plus grand. Afin d'éviter les problèmes de congestion l'administrateur décide de placer en entrée du serveur une file d'attente FIFO qui jouera le role d'interrupteur et qui ne laissera passer les demandes d'acces au serveur que s'il n'y en a pas plus de M qui sont en attente où en train d'être traitées. Celles qui ne peuvent pas entrer sont mises en attente.Faire un schéma du réseau.
Quel sera le nombre moyen e_0 de traitements par le serveur, pour une requête donnée?

On suppose dans la question 5, que le temps de service du serveur Web, est proportionnel à M et est égal à Mx10s.

Peut-on modéliser de façon exacte ce reseau en utilisant le théorème BCMP avec un débit d'arrivée qui dépend du nombre de clients dans le système? Pourquoi?

L'administrateur veut choisir au mieux le nombre M. Quel est à votre avis le citère de performance à optimiser, pourquoi?
Indiquer une modélisation simple du problème et calculer la meilleure valeur M=1, 2, ou 4.

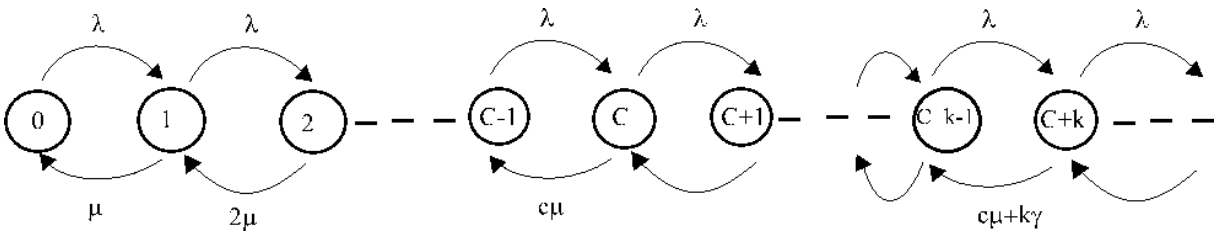
Corrigé

Exercice 1 : Files avec des clients impatients

1. Si C+k clients dans la file, il y a k clients en attente dont l'impatience suit une loi exponentielle. L'événement qui se produira en premier si c'est un départ par impatience est **l'inf de k lois exponentielles de taux γ,** qui suit une loi exponentielle de taux $k\gamma$.
Le départ par fin de service se passera à un instant qui est l'inf de C durées suivant une loi exponentielle de taux μ. L'inf suit une loi exponentielle de taux $C\mu$.
En réalité, le départ qui se produit en premier est celui qui se produit à un instant qui est l'inf des deux donc un départ soit par impatience soit par fin de service au bout d'un temps qui suit une loi exponentielle de taux la somme des taux : $C\mu+k\gamma$.

2. Le nombre de clients dans la file à l'instant t est une variable sans mémoire qui évolue soit en diminuant de 1 (départ) soit en augmentant de 1 (arrivée avec taux λ)

3.



L'application du théorème des coupes donne :

Pour $i \le C$ $\quad \Pi(i) = \Pi(0)\dfrac{\lambda^i}{i!\mu^i}$

Pour $k \ge 0$ $\quad \Pi(C+k)=\Pi(0)\dfrac{\lambda^{C+k}}{C!\mu^C\prod_{i=1}^{k}(C\mu+i\gamma)}$

Le système sera stable si on peut trouver P(0) tel que $\sum \Pi(i) = 1$

$$\Pi(0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{C}\frac{\lambda}{i!\mu^i}^i + \lambda^C\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{C\mu+i\gamma}}$$

La série qui est au dénominateur est convergente si $\gamma\neq0$ car le terme général est (à un coefficient multiplicatif près) équivalent à $\dfrac{\lambda^k}{k!\gamma^k}$

Si $\gamma=0$, la stabilité est vraie si $\lambda \pi C\mu$

4. $L = \sum_{j=1}^{\infty} j\Pi(j)$ $\qquad R = \dfrac{L}{\lambda}$

Le taux de départ par fin de service est $i\mu$ quand il y a i serveurs occupés. Pour obtenir le débit de départ, il faut multiplier par les probabilités d'état et de sommer.

Débit de départ par fin de service : $\sum_{i=1}^{C} i\mu\Pi(i) + C\mu\sum_{k=1}^{\infty}\Pi(C+k)$

Débit de départ par impatience : $\sum_{k=1}^{\infty} k\gamma\Pi(C+k)$

La somme des 2 est λ . La proportion τ de ceux qui sont servis par rapport à ceux qui partent par impatience :

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{C} i\mu\Pi(i) + C\mu\sum_{k=1}^{\infty}\Pi(C+k)}{\sum_{k=1}^{\infty} k\gamma\Pi(C+k)}$$

5. $\mu = \gamma$. On obtient la même chaîne de Markov que celle M/M/ ∞

Pour M/M/ ∞ pas d'attente donc $R = \frac{1}{\mu}$ et $L = \frac{\lambda}{\mu}$

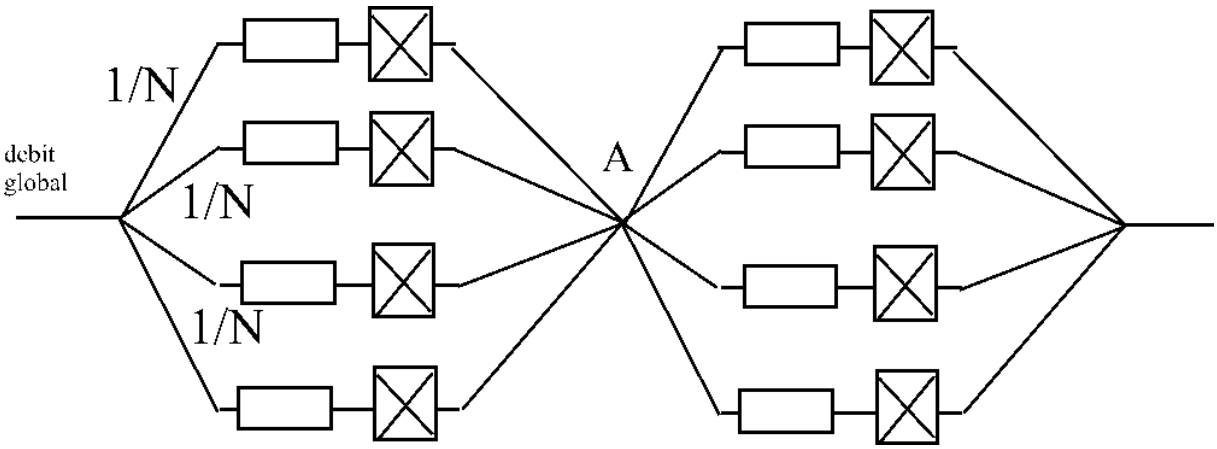
Exercice 2 : Performances d'un commutateur de paquet

1. Le débit global d'entrée est Nλ paquets/s et un paquet a en moyenne une longueur $\frac{1}{\mu}$ bits donc le débit global est $\frac{N\lambda}{\mu}$ bits/s

2. On peut modéliser par le théorème de Jackson dont les hypothèses sont vérifiées (le temps de service est constant pour un bit, la longueur du paquet étant exponentiellement répartie, le temps de service du paquet le sera)

3. On peut se ramener au théorème de Jackson de la façon suivante : pour les N files du 1er étage $e_i = \frac{1}{N}$

4.



En sortie du point A, le client va vers N-1 files avec la probabilité $\frac{1}{N-1}$

Si on veut calculer e_{j+N} il faut tenir compte de tous les paquets provenant de toutes les files du 1er étage autres que j :

$$e_{j+N} = \sum_{i\neq j} e_i \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}\frac{N-1}{N-1} = \frac{1}{N}$$

Remarque : on peut raisonner différemment et trouver $e_i = 1$ pour tout i mais il faut garder λ comme débit d'arrivée en nombre de paquets/s

5. $R = \sum_{i=1}^{N} e_i R_i + \sum_{j=1}^{N} e_{N+j} R_{N+j} = N.\frac{1}{N} R_1 + N.\frac{1}{N} R_2$

En raisonnant pour un bit on aurait :

$$R_1 = \frac{1}{\mu_1 - \frac{\lambda}{\mu}} \qquad R_2 = \frac{1}{C - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Mais si on raisonne pour un paquet et les taux de service sont : $\mu_1 \mu$ et $C\mu$

$$R_1 = \frac{1}{\mu_1 \mu - \lambda} \qquad R_2 = \frac{1}{C\mu - \lambda}$$

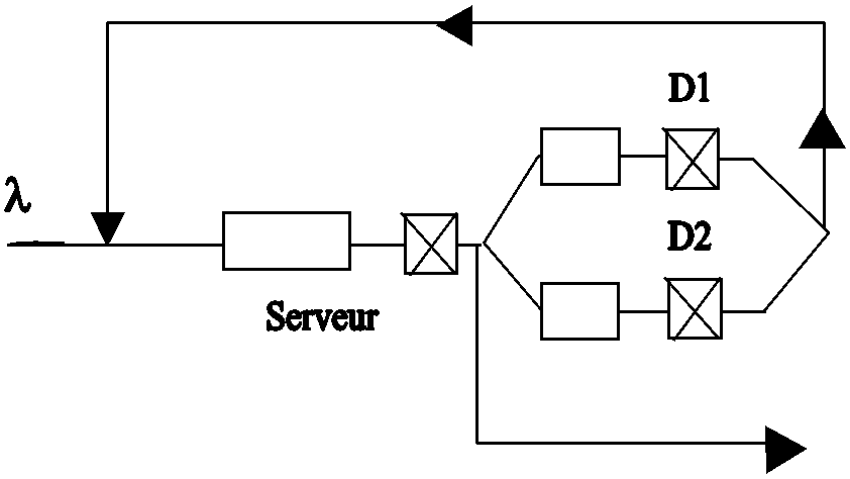
$$R = \frac{1}{\mu_1 \mu - \lambda} + \frac{1}{C\mu - \lambda}$$

Exercice 3 : Réseau informatique

1. L'hypothèse est raisonnable si il y a un grand nombre d'utilisateurs indépendants (théorème de superposition)

2. Aucun théorème ne s'applique à cause des priorités

3. et 4. On néglige les requêtes envoyées par les stations de travail. On a un réseau ouvert



Il n'y a plus qu'une seule classe de priorité et on peut appliquer Jackson :

$R = e_0 R_0 + e_1 R_1 + e_2 R_2$

R_0 est négligeable si S_0 l'est

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{S_1} - \lambda e_1} \qquad R_2 = \frac{1}{\frac{1}{S_2} - \lambda e_2}$$

AN : $\lambda = \frac{1}{300}$ requêtes/s donc R=210s

La charge n'est pas bien répartie car le disque 2 est plus lent et reçoit autant de pages. On pourrait par exemple acheter un disque identique au disque 2 et porter sur lui la moitié de la charge du disque 2.

4. Si le débit est nλ et s'il y a n disques analogues à D_1, on répartira la charge totale (e=20) sur les 2 disques $e_i = \frac{20}{n}$

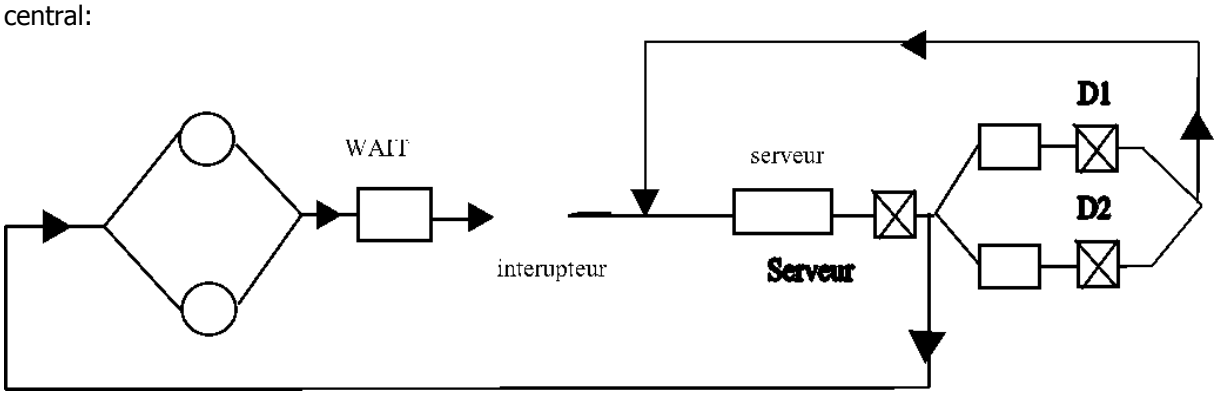
Le taux de trafic pour chacun d'eux sera :

$$\rho_i = n\lambda \frac{20}{n} S_1 = \frac{1}{300}.20.5 = \frac{1}{3}$$

$$L_i = \frac{1}{2} \quad (\text{car } L_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i})$$

$$R = \frac{\sum_i L_i}{n\lambda} = \frac{n.0{,}5}{n.\frac{1}{300}} = 1500$$

5. Si au contraire on n'a que les interactifs, on a un réseau fermé. On limite l'accès au système central:



$$e_0 = e_1 + e_2 + 1 = 21$$

L'interrupteur ne laisse passer les requêtes que si elles sont en nombres < M. On ne peut pas modéliser les arrivées par un débit dépendant du nombre de clients dans le système central et Poissonnien car il y a aussi d'autres arrivées qui ne peuvent pas entrer et qui sont stockées dans la file Wait mais elles seront présentées dès qu'elles pourront être traitées.

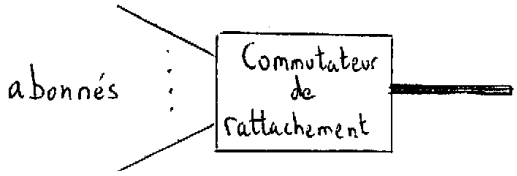
Pour optimiser M il faut optimiser le débit de sortie du système central (ou le temps de réponse total : temps de réponse du système central + temps d'attente WAIT, ce qui revient au même)

Si on suppose que le nombre de stations est grand et que la charge est forte, on peut supposer que la file WAIT est presque toujours vide et considérer que le nombre de requêtes dans le système central est constant et vaut M. On peut ensuite appliquer MVA comme en PC.

Module : Files d'attente (FA11) (rattrapage)
Durée : 3h
Documents autorisés : Polycopié de cours vierge

Sujet

Exercice I: **Un étage d'abonnés**



Considérons un étage d'abonnés, concentrant le trafic de N usagers sur un nombre restreint R de lignes vers le commutateur. Un utilisateur lorsqu'il demande une communication, s'il trouve toutes les lignes occupées n'attend pas et retombe dans une nouvelle période d'inactivité. On suppose que les durées des communications sont exponentielles de taux μ et que le nombre moyen d'appels lancés par unité de temps par un usager inactif est λ.

I.1/ On modélise d'abord le trafic obtenu par superposition des appels de tous les usagers, par un flux Poissonnien de paramètre $\Lambda = N\lambda$, supposant N suffisamment grand.
Dessiner la chaîne de Markov relative au nombre de communications en cours: C(t)
Quel est le taux de passage de l'état j à l'état j+1, quel est le taux de passage de l'état j à l'état j-1?
Calculer la probabilité de rejet d'un appel : p(R).
On suppose $\lambda = 0.004$, $N = 100$ et $\mu = 1$
Indiquer comment on calculerait le nombre de lignes nécessaires pour que la probabilité de rejet soit inférieure à 10^{-4} ? (On ne demande pas de faire effectivement le calcul).

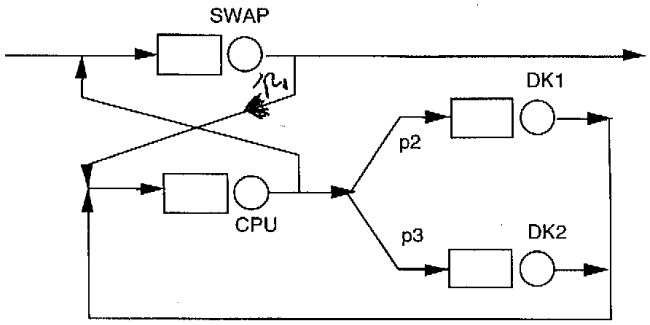
I.2/ On veut répondre à cette même question mais en réalisant un modèle plus fin des usagers. On va tenir compte du fait qu'on a une population finie.
Lorsque n communications sont en cours il n'y a plus que N-n usagers susceptibles de lancer un appel. Dessiner à nouveau la chaîne de Markov. Quel est maintenant le taux de passage de l'état n à l'état n+1?
Calculer p(R).
Les appels qui arrivent maintenant ne le font pas indépendamment de l'état du système. La probabilité p(R) n'est donc plus la probabilité de rejet. Cette quantité représente la proportion du temps pendant lequel tous les serveurs sont occupés. Pour calculer la probabilité de rejet on va calculer la proportion de clients perdus, on va donc multiplier la proportion du temps pendant lequel tous les serveurs sont occupés par le quotient du débit d'arrivée dans l'état de rejet par le débit d'arrivée dans l'étage d'abonné Λ.

Montrer que $\Lambda = \sum_{k=0}^{R} (N-k)\,\lambda\, p(k)$

Exprimer cette probabilité de rejet.
Indiquer comment on calculerait le nombre de lignes nécessaires pour que la probabilité de rejet soit inférieure à 10^{-4} ? (On ne demande pas de faire effectivement le calcul

Exercice 2:

Soit le modèle d'un ordinateur à mémoire virtuelle décrit par la figure suivante:



Les programmes à exécuter entrent dans le système par le disque de Swap (qui sert à les mémoriser jusqu'à ce que les ressources qu'ils demandent soient disponibles). Les programmes sont ensuite traités par un serveur central et quittent le système par le disque de Swap. Par ailleurs, le système étant multiprogrammé, seul un nombre limité N de clients peuvent se partager la mémoire centrale (représentée virtuellement dans le modèle par {CPU, DK1 et DK2}).
Les temps de service supposés répartis exponentiellement ont pour moyennes respectives (ms):

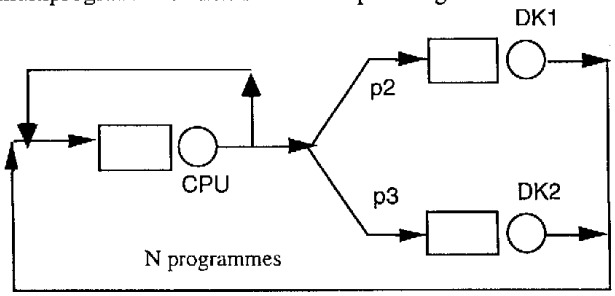
- Sswap=0.1
- Scpu=1,
- Sdk1=4,
- Sdk2=6

1. On fait l'hypothèse que les arrivées des programmes forment un processus poissonnien. Cette hypothèse est-elle raisonnable? Dans quel cas?

2. Dans un premier temps on va faire l'hypothèse qu'un nombre infini de clients peuvent se partager la mémoire centrale et que les probabilités de branchements sont constantes: p1=1/2, p2=0.6 et p3=0.3.
Calculer les nombres moyens de passage dans chaque file.
On fait aussi l'hypothèse que le disque de Swap a une capacité infinie. Quel théorème peut-on appliquer? Donner l'expression de la solution $p(n_{cpu}, n_{dk1}, n_{dk2})$ de l'état du système en régime stationnaire.
Quel est le goulet d'étranglement du système? Quel est le débit maximum en entrée du Swap?
Calculer le temps de réponse pour un débit d'entrée égal à 1/30 programmes/s.

3. Expliquer cette modélisation. Montrer en quoi elle est différente de la réalité mais elle correspond au nombre moyen de passage dans la file SWAP réel. Pourquoi a t-on fait cette modification?
Quels élèments ne sont pas pris en compte? Comment pourrait on les rajouter? Indiquer la méthode que vous proposeriez d'utiliser, sans faire de calculs.

4. On s'intéresse maintenant à ce modèle dans lequel on considère un degré de multiprogrammtion fixe N=3 décrit par la figure suivante:



Les probabilités de routage sont inchangées.
Où allons nous calculer le débit global?
Quel est le théorème que nous pouvons appliquer?
Donner le temps moyen de réponse d'un programme, le débit global du système.

Exercice 3: Modèles de trafic sur un lien

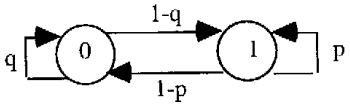
I/ On considère un lien transportant des cellules de longueur constante.
A quelle condition le trafic sera t'il Markovien?

II/ Compte tenu du synchronisme global on va faire une modélisation du trafic sous forme de chaîne de Markov à temps discret.

Note: On rappelle que le temps de séjour dans l'état i d'une chaîne de Markov à temps discret est:

$$\frac{1}{1 - p_{ii}}$$

On suppose que le trafic comporte des périodes de "silences" et des rafales. Pendant les "silences" des cellules arrivent mais avec un taux faible: dans un slot il y a la probabilité β pour qu'une cellule existe et $1-\beta$ pour que le slot soit vide . Pendant les rafales à chaque slot il y a une cellule avec la probabilité α et il n'y en a pas avec la probabilité $1-\alpha$. Les durées des silences et des rafales sont géométriques. On peut modéliser ce trafic sous forme d'une chaîne de Markov à temps discret de la forme suivante:



Calculer la durée moyenne des silences et des rafales, le débit des cellules, la probabilité des deux états: "silences" et rafales

III/ On considère la superposition de trafics indépendants provenant de 2 sources du type présenté à la question II correspondant à des valeurs des paramètres: α,β,p,q et α',β',p',q'. Indiquer le nombre d'états de la chaîne correspondant au trafic obtenu par superposition, les valeurs des taux de transition et la méthode que vous utiliseriez pour résoudre le problème de caractérisation du trafic obtenu par superposition.

UV Signal

Module : Théorie du Signal (TS11)

Durée :

Documents autorisés : Tous

Sujet

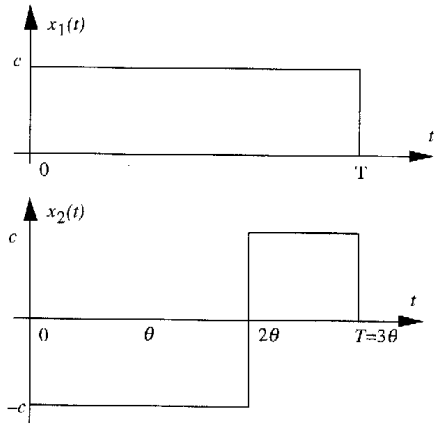
Justifier chaque réponse de façon concise. ***Répondre sur le questionnaire même***, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Tout résultat parachuté sans explication ne sera pas pris en compte.

Produit de convolution et filtrage adapté, application au RADAR actif

1 Déterminer le produit de convolution des signaux $x_a(t) = \text{rect}_{T_a}(t)$ et $x_b(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$ puis de $x'_a(t) = \text{rect}_{T_a}(t-\tau_a)$ et $x'_b(t) = \text{rect}_{T_b}(t-\tau_b)$ avec $T_a > T_b$, $\text{rect}_T(t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{pour } |t|<T/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

(On pourra utiliser avec profit une interprétation géométrique).

2 A l'entrée d'un filtre adapté au signal $x_k(t)$ se présente le signal $x_k(t)$ lui même, avec k = 1 ou 2. (On rappelle qu'un filtre adapté à un signal $s(t)$ de support temporel $[0,T]$ est le filtre de réponse impulsionnelle $s^*(T-t)$ (* pour conjugué). Quelles sont les sorties $y_k(t)$ associées aux deux signaux suivants ? Là aussi, une interprétation géométrique permet d'obtenir $y_k(t)$ sans aucun calcul !



3 Un RADAR actif émet vers une cible éventuelle le signal

$$e(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x(t-jT_r)\cos(2\pi f_0 t)$$

où $x(t)$ représente soit $x_1(t)$, soit $x_2(t)$,

f_0 est la fréquence porteuse du RADAR actif et $f_0 >> \frac{1}{T} >> \frac{1}{T_r}$. Qu'elle est l'enveloppe complexe associée à $e(t)$?

Après avoir rencontré une cible immobile, ce RADAR reçoit le signal $r(t) = \rho e(t-\tau) + b(t)$, où ρ désigne un affaiblissement et τ ($\tau < T_r$ pour éviter les ambiguïtés) est un retard que le RADAR cherche à estimer pour localiser la cible présente. Quelle est l'enveloppe complexe $\alpha_{e_\tau}(t)$ associée à $e(t-\tau)$? Justifier votre réponse.

4 Le RADAR effectue une démodulation cohérente de $r(t)$ à l'aide de la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$. Préciser comment on obtient les deux composantes en quadrature $p_r(t)$ et $q_r(t)$ de $r(t)$. Justifier votre réponse.

5 Ces deux composantes en quadrature $p_r(t)$ et $q_r(t)$ sont filtrées à travers le filtre adapté au signal $x(t)$. Représenter graphiquement les sorties de ces filtres adaptés pour chacune des impulsions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en absence du bruit $b(t)$.

6 $b(t)$ est un signal aléatoire bruit blanc de densité spectrale de puissance $N_0/2$ gaussien. Représenter graphiquement les sorties de ces filtres adaptés en présence du bruit $b(t)$. Quelle est la puissance de ce bruit $b(t)$ en sortie de ces filtres adaptés.

Comparer qualitativement les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ quant à la précision de l'estimation du retard τ en présence du bruit $b(t)$.

Module : Théorie du Signal (TS11)
Durée : 1h30
Documents autorisés : Tous

Sujet

Le but de l'exercice est de comparer, en terme de qualité, différentes possibilités pour transmettre un signal $m(t)$ sur une onde porteuse.

Les hypothèses :

- Le signal à transmettre, $m(t)$, est supposé réel, aléatoire, stationnaire au sens large. Il occupe la bande [50 Hz, 50 KHz]. Sa puissance est $P_m = 10^{-2}$ W et son amplitude maximum est de 0,15 V.
- La porteuse $p(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ a pour fréquence $f_0 = 100$ MHz. Sa phase initiale φ est aléatoire, équirépartie sur $[0, 2\pi[$ et indépendante de $m(t)$.
- Le canal est supposé transparent vis-à-vis de la porteuse modulée et à bruit additif blanc de DSP bilatérale $\frac{N_0}{2}$ avec $N_0 = 4\ 10^{-7}$ W/Hz.
- Les comparaisons seront faites à même puissance émise et égale à 2 W.
- Les différents filtres susceptibles d'être utilisés seront supposés idéaux et à gain unité dans leur bande utile.

I Modulation MA-DBSP

1°) Pour ce type de modulation quelle doit être la valeur de A : l'amplitude max. de la porteuse $p(t)$ pour que la puissance émise soit de 2 W ?

2°) Que vaut le rapport S/B de la liaison (en sortie du démodulateur) ?

3°) En déduire γ : le rapport S/B de la liaison en Bande de Base correspondante.

II Modulation MA-DBAP

Le taux de modulation est fixé à 50 %.

1°) Rappeler brièvement l'allure de la DSP de la porteuse modulée.

Calculer le rapport de la puissance contenue dans les bandes latérales à la puissance totale de la porteuse modulée.

2°) Quel type de démodulation utilisera-t-on de préférence et pourquoi ?

3°) Calculer et exprimer en dB le rapport S/B à l'entrée du démodulateur.

4°) Le rapport S/B précédent est considéré comme bon s'il excède 10 dB. Calculer et exprimer en dB le gain de modulation η_{DSAP}. En déduire le rapport S/B de la liaison.

III Modulation MA-BLU (Sup ou Inf)

1°) Proposer un schéma de réalisation du modulateur et du démodulateur.
Quelles seraient selon vous les difficultés de réalisation ou de mise en oeuvre éventuelles ?

2°) Quel est le rapport S/B de la liaison ?

IV Modulation de fréquence

On désire un indice de modulation généralisé égal à 3.

1°) Quelle est la sensibilité du modulateur qui permet d'obtenir ce résultat ?
Quelle est alors la valeur maximale de la fréquence instantanée ?
Que vaut la Bande de Carson ?

2°) Calculer et exprimer en dB le rapport S/B à l'entrée du discriminateur.

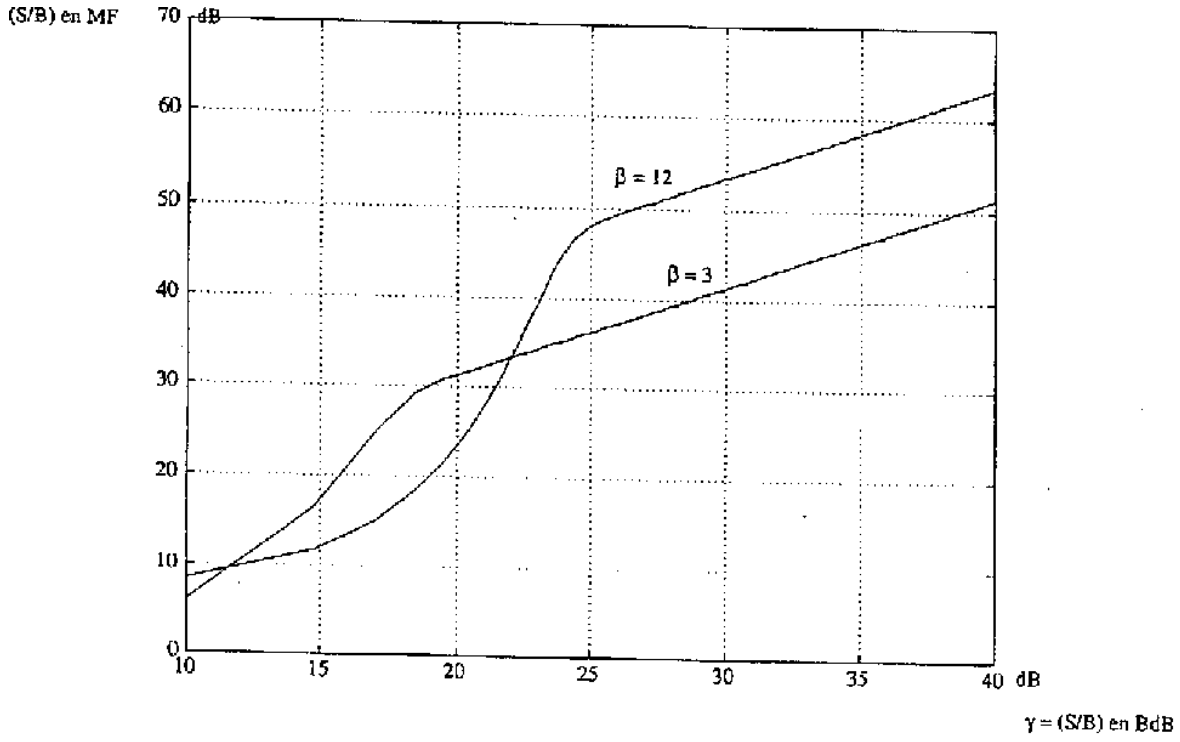
3°) Ici encore le rapport S/B précédent sera considéré comme bon s'il excède 10 dB. Calculer et exprimer en dB le gain de modulation η_{MF}. En déduire le rapport S/B de la liaison.

On espère améliorer encore la qualité de la liaison en augmentant l'indice de modulation. On se fixe donc un nouvel indice égal à 12.

4°) Quelle(s) modification(s) matérielle(s) entraine ce nouveau choix ?

On constate en définitive que la qualité de la liaison, au lieu d'augmenter, a en fait diminué.

5°) En vous aidant éventuellement des courbes ci-jointes expliquer, chiffres à l'appui, ce phénomène.



Rapport (S/B) en MF en fonction du rapport (S/B) en Bande de base pour différentes valeurs de l'indice de modulation

UV Informatique

Module : IF11
Durée : 3h
Documents autorisés : Tous

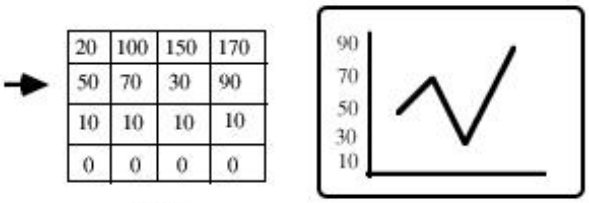
Sujet

Les exercices sont indépendants. Vous avez largement le temps de tout faire si vous avez suivi les cours, fait les exercices de TD et validé votre travail en TP. Ne rédigez pas vos algorithmes directement sur votre copie. Il sera tenu compte de la qualité de présentation du travail (la propreté de la copie est un minimum, cela facilite la correction et évite tout risque de contestation). Prenez le temps de lire le texte (et de lire ce qui y est écrit et non pas ce que vous souhaiteriez y voir écrit !). Le barème est indicatif.
Vous devez respecter les spécifications concernant les noms qui sont utilisés dans les définitions.

N'OUBLIEZ PAS DE MARQUER VOTRE NOM, PRENOM ET DE RENDRE LA FEUILLE REMISE SEPAREMENT

Exercice 1 (sur 5)

Définition : Un Modèle Numérique de Terrain (MNT) est une matrice à deux dimensions représentant une portion de territoire. Cette matrice définit un maillage (à l'image des latitudes / longitudes). Chaque élément de la matrice représente la "valeur" de l'altitude en cette maille.
On désire tracer sur un écran, le profil de l'évolution de l'altitude pour une ligne donnée de la matrice.



MNT Ecran

Vous disposez d'une procédure de tracé, tracer, dont la signature est la suivante :

```
type CoordonnéeEcran =   structure
                             x : Entier,
                             y : Entier
                         fstruct

tracer : CoordonnéeEcran x CoordonnéeEcran -> ∅
```

et dont la sémantique est : "Cette procédure permet de tracer un trait sur l'écran partant de la première coordonnée vers la deuxième".
Vous disposez également d'une fonction de convertion, convertir, permettant de transformer la valeur de l'altitude d'un élément du tableau (avec sa colonne - 1er paramètre) en coordonnée écran dont la signature est la suivante :

```
convertir :   Entier x Réel   ->   CoordonnéeEcran
```

Ecrire un algorithme récursif d'une procédure, profil, permettant de tracer le profil de terrain pour une ligne donnée à partir d'une matrice 100 x 100 et préciser l'appel initial si l'on désire effectuer ce tracé pour la ligne 10 de la matrice. Pour simplifier, on considère que les données sont correctes et que les fonctions tracer et convertir font leur travail correctement. Vous n'avez pas à tracer ni les axes ni la graduation.

Exercice 2 (sur 2 et 6)

Vous disposez de deux procédures, bipCourt et bipLong dont les signatures sont les suivantes :

bipCourt : ∅ -> ∅
bipLong : ∅ -> ∅

La sémantique de ces procédures est : "Permettent d'émettre un signal sonore respectivement court et long pour émettre en code morse (exemple la lettre a : un bipCourt et un bipLong)".

Vous disposez d'un tableau de caractères, message, dont la spécification est la suivante :

message : tableau [1..100] de Caractère

La sémantique de message est de contenir une phrase constituée exclusivement de lettres, chiffres et espaces que l'on souhaite émettre en morse à l'aide des procédures bipCourt et bipLong. Le message est terminé par le caractère spécial FDC (à ne pas transmettre).

Pour simplifier on ne considère pas les phases d'initialisation/conclusion de communication (début de transmission, ...) et on suppose que les données sont correctes.

Question 1 : Proposer une organisation des données pour gérer l'alphabet morse
Question 2 : On considère que les informations sont entrées conformément à la description donnée en réponse à la question 1, écrire l'algorithme d'une procédure, envoi, qui prend en entrée le message et les informations modélisées et effectue l'envoi du message.

a	.-	**g**	--.	**m**	--	**s**	...	**y**	-.--
b	-...	**h**	....	**n**	-.	**t**	-	**z**	--..
c	-.-.	**i**	..	**o**	---	**u**	..-	**<espace>**	
d	-..	**j**	.---	**p**	.--.	**v**	...-		
e	.	**k**	-.-	**q**	--.-	**w**	.--		
f	..-.	**l**	.-..	**r**	.-.	**x**	-..-		
1	.----	**3**	...--	**5**	.....	**7**	--...	**9**	----.
2	..---	**4**	....-	**6**	-....	**8**	---..	**0**	-----

Exercice 3 (sur 3) **REPONDRE SUR LA FEUILLE REMISE SEPAREMENT**

Qu'affiche le programme donné sur la feuille (il compile sans erreur ni warning et fonctionne correctement) ? (5 lignes maximum)

Exercice 4 (sur 2) **REPONDRE SUR LA FEUILLE REMISE SEPAREMENT**

Que fait l'algorithme donné sur la feuille ? Ne paraphrasez pas l'algorithme mais explicitez ce que serait le texte du sujet de l'exercice amenant cet algorithme comme solution. (5 lignes maximum)

Exercice 5 (sur 2) **REPONDRE SUR LA FEUILLE REMISE SEPAREMENT**

En se plaçant dans le domaine algorithmique, répondre à la question donnée sur la feuille. (5 lignes maximum)

Exercice 3

Après f1

V1 = ☐ V2 = ☐ V3 = ☐

Après f2

V1 = ☐ V2 = ☐ V3 = ☐

Après f3

V1 = ☐ V2 = ☐ V3 = ☐

```
typedef   struct  { int  valeur;
                    char code;  } donnee;

 void f1 (int *a, char b);
 void f2 (donnee *b, int c);
 void f3 (donnee *a, char *c);
 void f4 (donnee **b, char a);


 void f1 (int *a, char b)
/*************************/
 {   *a = 7;   b  = 'd';          } /* f1 */

 void f2 (donnee *b, int c)
/*************************/
 { b->valeur = c;  b->code   = 'e'; } /* f2 */

 void f3 (donnee *a, char *c)
/*************************/
 { f4 (&a, *c);  *c = 'f';          } /* f3 */

 void f4 (donnee **b, char a)
/*****************************/
 { (**b).valeur = 9;  (**b).code = a;     } /* f4 */


 int main ()
/************/

 { int v1; char v2; donnee v3;

   v1 = 5; v2 = 'c'; v3.valeur = 7;  v3.code   = 'a';

   f1 (&v1, v2);
   printf ("Apres f1 : v1 = %d  v2 = %c  v3 = %d %c\n",
                    v1, v2, v3.valeur, v3.code);
   f2 (&v3, *(&v1));
   printf ("Apres f2 : v1 = %d  v2 = %c  v3 = %d %c\n",
                    v1, v2, v3.valeur, v3.code);
   f3 (&v3, &v2);
   printf ("Apres f3 : v1 = %d  v2 = %c  v3 = %d %c\n",
                    v1, v2, v3.valeur, v3.code);

 } /* main */
```

IF11 - IG1				19/01/99	Ne rien écrire dans ce cadre			
Exo 1 :		-	KO	KO+	OK-	OK	OK+	5
Exo 2 :	1	-	KO	KO+	OK-	OK	OK+	2
	2	-	KO	KO+	OK-	OK	OK+	6
Exo 3 :		-	KO	KO+	OK-	OK	OK+	3
Exo 4 :		-	KO	KO+	OK-	OK	OK+	2
Exo 5 :		-	KO	KO+	OK-	OK	OK+	2

Note : / 20

Exercice 4

Appel : e : Entier ; b : tableau [1..N] [1..N];
...
e <- 0; A (b, 1, 1, e)

procédure A (Entrée b : tableau [1..N] [1..N] de Entier, c, d : Entier, Entrée-Sortie e : Entier)

```
Si d ≤ N
Alors
    Si d mod 2 ≠ 0
    Alors    Si b [c][d] ≥ 0
             Alors
                 e <- e + b [c][d]
             Sinon
                 e <- e - b [c][d]
             Finsi
    Finsi
    A (b, c, d+1, e)
Sinon
    Si c < N
    Alors
        A (b,c+1, 1, e)
    Finsi
Finsi
fproc A
```

Que fait A ?

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 5

Il existe entre autres deux structures répétitives le "pour" et le "tant que". Quelle est la différence entre ces deux structures ? (5 lignes maximum)

.....

.....

.....

Corrigé

Solution

Remarque : D'une manière générale vous ne lisez pas correctement le texte. De plus ne recopiez pas le texte sur votre copie, j'ai déjà une ... petite idée de ce que contient le sujet (vous diluez votre apport) et cela complique la correction - merci -.

Exercice 1

```
procédure profil ( Entrée matrice : tableau [1..N][1..N] de Réel, ligne : Entier, colonne : Entier)

        tracer ( convertir (    colonne,
                                matrice [ligne] [colonne]),
                 convertir (    colonne + 1,
                                matrice [ligne] [colonne + 1] )

        Si colonne < N - 1
        Alors
                profil ( matrice, ligne, colonne + 1)
        Finsi

fproc profil


appel initial :

        const           N = 100)
        matrice : tableau [1..N] [1..N] de Réel
        ...
        profil (matrice, 10, 1)
```

Remarque : La signature de convertir est construite à partir de la colonne et d'un réel => la matrice est une matrice de réel. Vous n'avez pas besoin de descendre au niveau des x et des y vous ne devez manipuler que des CoordonnéeEcran. Dans l'arret de la récursion ne mettez pas de message (comme il y a forcément passage par la branche de l'alternative qui ne contient pas d'appel récursif cet affichage se fera obligatoirement). Attention aux débordements de tableau avec les références sur [colonne + 1]. Vous ne devez pas voir apparaitre simultanément un tant que et un appel récursif dans l'algorithme (l'appel récursif formant déjà un système itératif).

On peut optimiser en applicant les mêmes méthodes que lors des TD en transmettant la dernière valeur calculée pour éviter de faire un nouvel appel à convertir (cerise sur le gâteau).

Exercice 2

Question 1

```
const   NB_MAX_SON 5
        NB_MAX_CARACTERE 37

type Son = énuméré <POINT, TRAIT>               // sinon utiliser des constantes entieres
                                                        pour representer  POINT et TRAIT
                                                        et dire que code est un tableau d'entier

type CaractereCodeType =    structure
                                nbDeSigne : Entier
                                code : tableau [1.. NB_MAX_SON] de Son
                            fstruct

type AlphabetType =  tableau [1.. NB_MAX_CARACTERE] de
                            structure
                                info : Caractere
                                codage : CaractereCodeType
                            fstruct
```

Question 2

```
procédure envoi (Entrée message : tableau [1..100] de Caractère, alphabet : AlphabetType)

        indice <- 1

        tant que message [indice] <> FDC
                emettre (recherche (alphabet, message [indice]))
                indice <- indice + 1
        ftq

fproc envoi


procédure emettre (Entrée symbole : CaractereCodeType)

        pour indice <- 1 à symbole.nbDeSigne

                Si symbole.code [indice] = POINT
                Alors
                        bipCourt
                Sinon
                        bipLong
                Finsi

        fpour

fproc emettre

fonction recherche (alphabet : AlphabetType, symbole : Caractere) : CaractèreCodeType

        indice <- 1

        tant que alphabet [indice].info <> symbole
                indice <- indice + 1
        ftq

        retourner alphabet [indice].codage

ffonct recherche
```

Remarque : La signature de envoi doit avoir non seulement le message mais aussi la structure de donnée que vous avez définie dans le (1). Le texte doit vous mettre la puce à l'oreille -> pas de fonction de conversion ... sinon vous n'avez rien à passer en parametre!. FDC dénote un caractère spécial (donc ne tient qu'un emplacement dans le tableau message (et non pas la séquence 'F' 'D' et 'C'). Le système itératif d'envoi s'arrête donc sur la détection de FDC et non pas sur 100. Le traitement des caractères doit être homogène pas de distinction entre chiffre et lettre => sur le tableau de modélisation du code morse il faut donner la taille pertinente ou à defaut utiliser un symbole particulier de fin de données pertinentes. Compte tenu de la nature homogène des données codées (point / trait) le code morse est modélisé par un tableau et non 5 champs (qui posent des problèmes car il faut alors distinguer le traitement pour chacun des champs au lieu de faire une répétitive). La procédure envoi se contente de faire des appels à bipLong et bipCourt, elle n'a pas de paramètre de sortie.

Exercice 3

suivant votre sujet :

```
typedef   struct  { int  valeur;
                    char code;  } donnee;

 void f1 (int *a, char b);
 void f2 (donnee *b, int c);
 void f3 (donnee *a, char *c);
 void f4 (donnee **b, char a);


 void f1 (int *a, char b)
/************************/
 {   *a = 7;   b  = 'd';          } /* f1 */

 void f2 (donnee *b, int c)
/************************/
 { b->valeur = c;  b->code   = 'e'; } /* f2 */

 void f3 (donnee *a, char *c)
/************************/
 { f4 (&a, *c);  *c = 'f';          } /* f3 */

 void f4 (donnee **b, char a)
/****************************/
 { (**b).valeur = 9;  (**b).code = a;     } /* f4 */


 int main ()
/***********/

 { int v1; char v2; donnee v3;

   v1 = 5; v2 = 'c'; v3.valeur = 7;  v3.code   = 'a';

   f1 (&v1, v2);
   printf ("Apres f1 : v1 = %d  v2 = %c  v3 = %d %c\n",
                    v1, v2, v3.valeur, v3.code);
   f2 (&v3, *(&v1));
   printf ("Apres f2 : v1 = %d  v2 = %c  v3 = %d %c\n",
                    v1, v2, v3.valeur, v3.code);
   f3 (&v3, &v2);
   printf ("Apres f3 : v1 = %d  v2 = %c  v3 = %d %c\n",
                    v1, v2, v3.valeur, v3.code);

 } /* main */


Apres f1 : v1 = 7  v2 = c  v3 = 7 a
Apres f2 : v1 = 7  v2 = c  v3 = 7 e
Apres f3 : v1 = 7  v2 = f  v3 = 9 c
```

Exercice 4

Algorithme de référence :

```
procédure A (Entrée b : tableau [1..N] [1..N]de Entier, c, d : Entier, Entrée-Sortie e : Entier)

    Si d ≤ N
    Alors
        Si d mod 2 ≠ 0
        Alors       Si b [c][d] ≥ 0
                    Alors
                        e <- e + b [c][d]
                    Sinon
                        e <- e - b [c][d]
                    Finsi
        Finsi
        A (b, c, d+1, e)
    Sinon
        Si c < N
        Alors
            A (b,c+1, 1, e)
        Finsi
    Finsi
fproc A
```

d mod 2 ≠ 0 et b [c][d] ≥ 0 : Somme des valeurs absolues (VA) des éléments de colonnes impaires

Remarque : L'objectif est ici de vous faire prendre conscience qu'un algorithme écrit par quelqu'un d'autre avec un nommage des variables non significatif ne facilite pas particulièrement la lecture. L'accès à la matrice permet de voir que c modélise une ligne et d une colonne. A partir de la, le test le plus imbriqué traite le problème de la valeur absolue ou de son opposée (et non l'inverse). Le d mod 2 permet de savoir si le numéro de la colonne est paire ou non (la numérotation commence à 1). On vous donne l'appel de A il est donc inutile de rentrer dans les détails de savoir si c (ou d) est < à N ...

Exercice 5

Il existe entre autres deux structures répétitives le "pour" et le "tant que". Quelle est la différence entre ces deux structures ?
-> Le pour doit être utilisé lorsque le nombre d'itération est connu. Il évite d'avoir à gérer explicitement la variable de contrôle (souvent un indice).

Module : IF12
Durée : 3h
Documents autorisés : Tous

Sujet

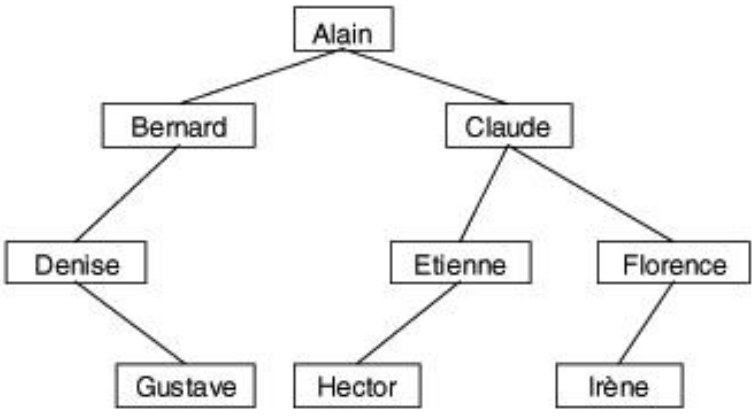
Les exercices sont indépendants. Vous avez largement le temps de tout faire si vous avez suivi les cours, fait les exercices de TD et validé votre travail en TP. Ne rédigez pas vos algorithmes directement sur votre copie. Il sera tenu compte de la qualité de présentation du travail (la propreté de la copie est un minimum, cela facilite la correction et évite tout risque de contestation). PRENEZ LE TEMPS DE LIRE LE TEXTE (ET DE LIRE CE QUI Y EST ECRIT et non pas ce que vous souhaiteriez y voir écrit !). Le barème est indicatif.
Vous devez respecter les spécifications concernant les noms qui sont utilisés dans les définitions.

Exercice 1 (sur 10)

On souhaite effectuer un affichage à partir d'un arbre généalogique. Pour simplifier, on considère que chaque personne ne peut avoir que 2 descendants au plus (on utilise donc un arbre binaire), que l'arbre est correctement rempli.
A partir des primitives vues en cours sur les arbres binaires, écrire l'algorithme d'une procédure, Famille, qui prend en entrée un arbre et affiche les membres de la famille par génération (l'ordre à l'intérieur d'une génération n'est pas important). Pour simplifier on ne demande aucune présentation particulière mais seulement l'affichage du niveau de génération et le nom de la personne. Vous disposez de l'ensemble des structures de données vues en cours et de leurs primitives de manipulation. Pour chacune des manipulations utilisées vous rappellerez la signature.

On prend comme convention que seul le nom de la personne (une chaîne de caractère) est contenu dans l'arbre. La restitution s'effectue donc sous la forme : valeurRacineArbre (A) si A est un arbre.

A titre d'exemple l'arbre (remarque : vous n'avez pas à vous préoccuper de savoir si Gustave est en fils gauche ou fils droit de Denise) :



provoque comme affichage :

1 Alain 2 Bernard 2 Claude 3 Denise 3 Etienne 3 Florence 4 Gustave 4 Hector 4 Irène

mais pourrait aussi produire :

1 Alain 2 Claude 2 Bernard 3 Denise 3 Florence 3 Etienne 4 Irène 4 Gustave 4 Hector

Exercice 2 (sur 5)

On considère un texte sous la forme d'une liste simplement chaînée (chaque élément de la liste contient un mot). Un mot est une série de caractère de longueur variable mais toujours strictement supérieure à 0 et inférieure ou égale à 15 caractères. Un mot particulier composé uniquement du caractère spécial LF signifie un passage à la ligne. Vous n'avez accès à un mot que caractère par caractère (il n'y a pas de type chaîne).

Question 1 (sur 2)

Faire une représentation graphique d'une telle liste et écrire en C la description de cette liste.

Question 2 (sur 3)

En considérant que vous disposez de la primitive de passage à la ligne, passerALaLigne, dont la signature est la suivante :

passerALaLigne : ∅ -> ∅

Ecrire l'algorithme récursif d'une procédure, Affichage, permettant à partir d'une liste donnée en entrée d'afficher le texte contenu dans la liste. Pour simplifier on considère que la liste est correcte, chaque mot doit être suivi d'un blanc (sauf le dernier). Vous donnerez la description algorithmique de votre liste.

Exercice 3 (sur 5)

On souhaite gérer une application concernant des informations relatives à des commandes formulées par des clients. Une commande est caractérisée par un numéro de commande (Ncommande) de type numérique. Une commande porte sur un ou plusieurs articles (au maximum 10). Chaque article est caractérisé par un numéro d 'article (Narticle) de type numérique, possède un prix (Prix) de type réel et une désignation (Libellé) de type chaîne de caractère. On souhaite gérer une information donnant la date de livraison (Date) représentée par un entier, pour une commande donnée (pour simplifier on considère que les commandes sont livrées intégralement en une seule fois et que les données sont correctes, disponibles ...).

Proposez une organisation des données permettant de faciliter l'écriture de l'algorithme d'une fonction, PleinDEuro, prenant en entrée un (ou plusieurs ?) nom de fichier et permettant d'évaluer le montant des commandes non encore livrées. Ecrire cet algorithme.

Corrigé

Exercice 1

A) Solution utilisant une liste (triée) pour conserver les niveaux.

```
type Enregistrement_type =      structure
                                    Niveau : entier
                                    Nom : chaîne de caractère
                                fstruct

procédure Famille (Entrée A : arbre)

    L : Liste triée de Enregistrement_type

    L = nouvelleListe ()
    parcoursFamille (A, 1, L)
    Afficher (L)

fproc Famille
```

```
procédure parcoursFamille ( Entrée A : arbre, N : niveau, Entrée-Sortie L : Liste d'Enregistrement_type)

        enregistrement : Enregistrement_type

        si estArbreVide (A) = FAUX
        alors
                Enregistrement.Niveau = N
                Enregistrement.Nom = valeurRacineArbre (A)
                enlister (L, enregistrement)

                parcoursFamille (sousArbreGauche (A), N + 1, L)
                parcoursFamille (sousArbreDroit (A), N + 1, L)
        finsi

fproc parcoursFamille


procédure Afficher (Entrée L : liste d'Enregistrement_type)

        enregistrement : Enregistrement_type

        si estListeVide (L) = FAUX
        alors
                enregistrement = valeurElementListe (L)
                écrire (enregistrement.Niveau, enregistrement.Nom)
                Afficher (suiteListe (L))
        finsi

fproc Afficher
```

Signatures utilisées :

Concernant l'arbre : ici Valeur est une chaîne de caractère

estArbreVide :	Arbre	->	Booléen
sousArbreGauche :	Arbre – {∅}	->	Arbre
sousArbreDroit :	Arbre – {∅}	->	Arbre
valeurRacineArbre :	Arbre – {∅}	->	Valeur

Concernant la liste triée : ici Valeur est un Enregistrement_type

nouvelleListe :		->	Liste
estListeVide :	Liste	->	Booléen
enlister :	Liste x Valeur	->	Liste
valeurElementListe	Liste – {∅}	->	Valeur
suiteListe :	Liste	->	Liste

fonction de comparaison pour l'insertion d'un élément de la liste triée

```
fonction inférieur (A, B : Enregistrement_type) : Booléen

        si A.Niveau <= B.Niveau
        alors
                retourner VRAI
        sinon
                retourner FAUX
        fsi

ffct inférieur
```

B) Solution utilisant une file

```
type Enregistrement_type =      structure
                                        Info : Arbre
                                        Niveau : entier
                                fstruct

procédure Famille (Entrée a : Arbre)

        enregistrement : Enregistrement_type
        F : File de Enregistrement_type

        si estArbreVide (a) = FAUX
        alors
                F = nouvelleFile ()
                enregistrement.Info = a
                enregistrement.Niveau = 1
                enfiler (F, enregistrement)
                parcours (F)
        fsi

fproc Famille

procédure parcours (Entrée-sortie F : File de Enregistrement_type)

        enregistrement : Enregistrement_type
        nvel_enregistrement : Enregistrement_type

        si estFileVide (F) = FAUX
        alors
                enregistrement = valeurTete (F)
                défiler (F)
                afficher (enregistrement.Niveau, valeurRacineArbre (enregistrement.Info))

                si estArbreVide (sousArbreGauche (enregistrement.Info)) = FAUX
                alors
                        nvel_enregistrement.Niveau = enregistrement.Niveau + 1
                        nvel_enregistrement.Info = sousArbreGauche (enregistrement.Info)
                        enfiler (F, nvel_enregistrement)
                fsi

                si estArbreVide (sousArbreDroit (enregistrement.Info)) = FAUX
                alors
                        nvel_enregistrement.Niveau = enregistrement.Niveau + 1
                        nvel_enregistrement.Info = sousArbreDroit (enregistrement.Info)
                        enfiler (F, nvel_enregistrement)
                fsi

                parcours (F)
        fsi

fproc parcours
```

Signatures utilisées :

Concernant l'arbre : ici Valeur est une chaîne de caractère

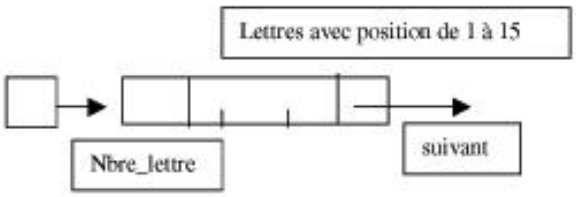
estArbreVide :	Arbre	->	Booléen
sousArbreGauche :	Arbre – {∅}	->	Arbre
sousArbreDroit :	Arbre – {∅}	->	Arbre
valeurRacineArbre :	Arbre – {∅}	->	Valeur

Concernant la file : ici Valeur est un Enregistrement_type

nouvelleFile :		->	File
estFileVide :	File	->	Booléen
enfiler :	File x Valeur	->	File
valeurTête	File – {∅}	->	Valeur
défiler :	File	->	File

Exercice 2

Question 1 Représentation graphique



Description en C

```
#define NBRE_LETTRES 15

typedef struct mot_type
        {
                int Nbre_lettre ;
                char Lettres [NBRE_LETTRES] ;
        } Mot_type ;


typedef struct element
        {
                Mot_type information ;
                struct element * suivant ;
        } Element ;

typedef  Element * Liste ;
```

Question 2

```
const    NBRE_LETTRES        15
         DEBUT               1

type Mot_type = structure
                        Nbre_lettre : entier
                        Lettres : tableau [DEBUT.. NBRE_LETTRES] de caractère
                fstruct

procédure Affichage (Entrée L : Liste de Mot_type)

        mot : Mot_type

        si estListeVide (L) = FAUX
        alors
                mot = valeurElementListe (L)

                si mot.Nbre_lettre = 1 et Lettres [DEBUT] = LF
                alors
                        passerALaLigne
                sinon
                        pour i = 1 à mot .Nbre_lettre
                                écrire (mot.Lettres[i])
                        fpour

                        si estListeVide (suiteListe (L)) = FAUX
                        alors
                                écrire (' ')
                        finsi

                finsi

                Affichage (suiteListe (L))
        finsi

fproc Affichage
```

Exercice 3

```
Const NB_ARTICLE_MAX = 10

type Commande_type =    structure
                        Ncommande : entier
                        Nb_article_commande : entier
                        Article : tableau [1..NB_ARTICLE_MAX] de Article_type
                        Livraison : Livraison_type
                fstruct

type Article_type =     structure
                        Narticle : entier
                        Prix : réel
                        Libellé : Chaîne de caractère
                fstruct

type Livraison_type =   structure
                        Livré : Booléen
                        Date : entier
                fstruct
```

```
fonction PleinDEuro (nom_commande : Chaîne de caractère): Réel

        commande : Fichier (Commande_type)
        com_client : Commande_type

        montant = 0

        ouvrir (commande, nom_commande, « lecture »)
        lire (commande, com_client)

        tant que estEnFin (commande) = FAUX

                si com_client.Livraison.Livré = FAUX
                alors
                        pour i = 1 à com_client.Nb_article_commande
                                montant = montant + com_client.Article [i].Prix
                        fpour
                fsi
                lire (commande, com_client)
        ftq

        fermer (commande)

        retourner montant

fproc PleinDEuro
```

Les sujets et les corrigés des années 98/99 et 97/98 ainsi que les corrigés des TP se trouvent sur le site
http://www-inf.int-evry.fr/cours/algorithmique/index.html

Module : Architecture matérielle logicielle des ordinateurs (AM11)
Durée : 1h30
Documents autorisés : Aucun

Sujet

Question I

Sur un PC, j'ai installé un périphérique pour effectuer une mesure de température. Je voudrais que cette température s'affiche en temps réel à l'écran tout en me laissant utiliser un autre logiciel. Le système sera basé sur les interruptions fournies par le timer du PC.

Q1) Expliquez le principe des interruptions masquables.
J'ai donc rapidement écrit un programme résident Calor.asm donné en ANNEXE

Q2) Qu'est ce qu'un programme résident ?
Pour lire la température, il suffit de lire un octet sur le port d 'E/S d'adresse 03BCh. Je voudrais aussi mémoriser les 100 dernières mesures.

Q3) Rajoutez les deux instructions qui manquent pour lire la température.
Pour afficher la température, il suffit d'appeler la procédure Affiche qui se trouve dans le fichier Affi.obj.
J'utilise donc l'Assembleur avec la commande C:\MASM Calor; qui me renvoie plusieurs messages d'erreur :
No or unreachable CS
Can't reach with segment reg
C'est vrai, j'ai oublié une ligne

Q4) Rajoutez la ligne manquante
Il me reste encore un message d'erreur :
Symbol not defined Affiche
Merci pour l'information, ceci me permet de corriger le programme.

Q5) Rajoutez la ligne manquante
Cette fois-ci l'Assembleur est heureux et je réalise donc l'édition des liens avec la commande C:\LINK Calor; qui me renvoie un message d'erreur :
Unresolved externals: affiche in file Calor.obj

Q6) Pourquoi?
Après cette correction de mon étourderie, j'obtiens donc un programme exécutable Calor.exe et je lance l'exécution par C:\Calor impatient de voir la température s'afficher. Et patatras: plantage général.

Q7) Pourquoi?
Bon sang mais c'est bien sûr! : il suffit de modifier une ligne du programme principal.
Après correction, le programme semble pouvoir s'exécuter mais n'affiche pas les bonnes valeurs. Qu'ai-je encore oublié?
eh oui, toujours la même erreur dans le programme d'interruption.

Q8) Rajoutez les lignes manquantes
Tout fiévreux, je relance mon programme et cette fois-ci la température s'affiche correctement (37°2!).
A ce moment, je m'aperçois que quelqu'un avait déjà écrit ce programme en C avec beaucoup plus de fonctionnalités (Pfff...tant d'efforts pour rien !). Cependant l'affichage ne me plaît pas et je décide de réécrire la fonction affiche en Assembleur.

Je voudrais afficher en haut et à droite de l'écran la température sur 2 chiffres. Le programme en C mémorise la température dans une variable temp qui sera passée en paramètre à la fonction affiche.

```
...
char temp;
...
affiche(temp);
```

(Si la température vaut 25°, alors l'octet temp contient 0010 0101).

Q9) Ecrire le programme en assembleur de la procédure affiche

```
_TEXT segment public 'CODE'

_afficheproc FAR
            push BP
            mov BP,SP
            ...
            ...     à écrire
            ...
_afficheendp
_TEXT  ends
       end
```

Question II

Je voudrais remplacer mon vénérable PC à base de 8086 par un PC moderne à base de Pentium. Avant je compare les deux machines avec le programme suivant

```
            MOV CX,1000
Ici :       NOP
            LOOP ici
```

Je peux ainsi mesurer les performances en Mips

Q1) Montrez, en proposant un autre programme, que cette mesure n'est pas très efficace. Quand on compare deux machines, de quels paramètres faut-il tenir compte pour que la comparaison soit valide ?

Convaincu par les meilleures performances de la machine avec Pentium :), je décide de comprendre l'amélioration des performances en analysant l'architecture interne du Pentium donnée en ANNEXE 2.

Q2) En vous aidant du schéma, expliquez comment fonctionne un processeur.

Q3) Combien le processeur Pentium peut-il gérer d'octets en mémoire?

Je découvre des nouveautés par rapport au 8086. Par exemple, des caches.

Q4) Le Pentium dispose de deux caches : Code cache et Data cache. Quel est le rôle de ces caches?

Dans le cas du 8086, l'accès à la mémoire est segmenté en utilisant des registres comme CS, DS, ES ou SS.

Q5) Lors de l'accès mémoire par MOV AL,[BX], quelle est l'adresse physique de l'octet en mémoire lorsque DS=1789 et BX=1515 ?

Q6) Le Pentium dispose d'une unité Page Unit : qu'est ce que la pagination?

Je remarque que pour améliorer le traitement des instructions, le processeur dispose de plusieurs unités, par exemple deux unités de traitement des opérations entières

Q7) Comment appelle-t-on un processeur de ce type?

Je remarque aussi que les deux unités U et V sont pipelinées.

Q8) Expliquez le principe du pipeline. Quel est le gain espéré pour un pipeline a n étages? Quelles sont les contraintes qui ne permettent pas d'obtenir ce gain? Le BTB (Branch Target Buffer) est-il lié à ce problème?

Corrigé

Question I

QI) interruption masquable de type INTR
L'interruption arrive au PIC (contrôleur d'interruption) qui prévient le microprocesseur (µP) grâce à la patte INTR de celui-ci. si I (dans registre d'état) est à 1, le µP va tenir compte de cette interruption (si I est à 0, il n'en tient pas compte d'où le terme de masquable). Il termine l'instruction en cours puis renvoie au PIC un acquittement par le biais de la ligne INTA. Ensuite il met I et T à 0 pour ne pas être interrompu et récupère sur le bus de données le numéro du vecteur d'interruption. Puis le µP met dans la pile CS et récupère dans la table le CS qui lui fournit le programme d'interruption, il fait de même avec IP. Une fois ce programme exécuté, il y a retour au programme principal.

Q2) Un programme résident est un programme écrit par l'utilisateur et placé juste au dessus de la mémoire système, mais qui contrairement à un programme normal, ne sera pas écrasé par d'autres instructions après son exécution. En effet on décale les autres instructions de quelques lignes pour laisser la place au programme résident. Cela s'effectue grâce à la fonction 31 de l'int21h et l'on met dans dx la taille du programme que l'on veut comme résident.

Q3) Les deux instructions qui manquent pour lire la température sont :

```
mov DX,03BCH        ; on met le numéro du port dans DX
in AL,DX            ; in et pas mov car il s'agit d'une entrée/sortie et pas de la mémoire
```

Q4) Il manque en dessous de code segment, une ligne qui fait le lien logique entre CS et code:

```
Assume  CS : code
```

Q5) Comme le code de la fonction affiche se trouve dans un autre fichier, il faut rajouter avant code segment la ligne :

```
EXTRN affiche
```

Q7) Il y a une erreur dans le programme principal lors de la mise en mode résident. En effet il est écrit : mov dx, (debut-inter)/16
Or la véritable instruction qu'il fallait écrire est :
mov dx, (debut-inter)/16 + 16 + 1 ;fournit de la place à réserver pour le programme résident

Q8) Rajout de ligne dans le programme d'interruption

```
mov  si, pos                ; attention pos est un DW
mov  dx, segment mesure
mov  ds, dx                 ; car on ne peut pas faire directement mov ds, segment mesure
mov  byte ptr ds:[si],al    ; car si est un DW et l'on ne veut que le poids faible de si (le premier
                              octet)
call affiche
```

Question II

Q1) exemple d'autre programme :

```
        mov     ax,1000
```

```
ici:    dec     ax
        jnz     ici
```

Le programme a lui aussi trois instructions comme le précédent mais les instructions ont des temps d'exécutions différents. Aussi une machine peut paraître plus performante qu'une autre aux vues de tel ou tel benchmark mais encore faut-il utiliser le même programme pour comparer. Ainsi généralement, la référence est le VAX 780

Les paramètres à comparer sont :
- -la capacité mémoire (ROM et RAM)
- -la fréquence du microprocesseur
- -la vitesse d'accès à la mémoire...

Q2) le fonctionnement d'un processeur :
Le µP est une unité centrale qui effectue des calculs (par l'intermédiaire des UAL : unité d'arithmétique et logique) et contrôle l'ensemble du système (grâce au bus de contrôle). Les données circulent sur le bus de données (16 lignes pour le 8086, 64 pour le pentium) et l'on récupère des informations n mémoire grâce au bus d'adresse (20 lignes pour le 8086 soit 1Mo = 2^{20} de mémoire contre 32 lignes pour le pentium)
Le µP peut ainsi réaliser les 4 fonctions suivantes :
1. Fetch : aller chercher les instructions en mémoire
2. Decode : les décoder
3. Execute : les executer
4. WB : write back

et il recommence un peu comme un automate

Q3) Comme le Pentium possède 32 lignes d'adresses, il peut gérer 2^{32} = 4.3 Goctets en mémoire

Q4) Le cache d'une manière générale permet de faire croire au µP qu'il a accès qu'à de la SRAM (le temps d'exécution est plus rapide que de la DRAM mais elle est aussi plus chère). Le cache est composé de la SRAM + le système qui la gère. Il permet d'éviter d'aller tout le temps chercher des informations dans la DRAM.
Elle repose sur le principe de localité spatiale : si une instruction est utilisée celles qui sont autour ont de fortes chances d'être utilisée et il y a de grandes chances que le résultat de l'opération soit utilisé.
Ici, on a séparé le cache, pour les données, du cache pour le code.

Q5) Dans le 8086, l'adressage se fait sur 20 bits

```
      DS          17890
+     BX           1515
=     @physique   18DA5
```

Q6) La pagination est utilisée (comme la segmentation) par la mémoire virtuelle. Dans ce cas-là on range les informations dans la mémoire virtuelle par page de taille fixe (par exemple des pages de 4k0)

Q7) Un processeur qui possède plusieurs pipelines (en l'occurrence 2 ici) est appelé processeur superscalaire (permet le parallélisme)

Q8) Le principe du pipeline : utiliser les différentes unités du microprocesseur en parallèle :
c'est donc un gain de temps
Le problème qui subsiste est le fait que chacune des instructions n'ait pas le même temps d'exécution que les précédentes
Il faut donc utiliser une horloge.

NDLR : Le corrigé n'est hélas pas complet, car Mr Schuller a tenu à garder les copies et nous n'y avons donc pas eu accès.

Remerciements

Je tenais à remercier tout particulièrement :

- Pete qui m'a soutenu en lisant des Largo Winch pendant que je squattais son ordinateur
- Maguy d'avoir bravé la technique (Photoshop) pour m'aider
- Chris pour ses critiques constructives…
- Carine pour avoir cru en l'achèvement de cet ouvrage
- Julien d'être resté zen malgré un 2ème colocataire un peu envahissant
- Bendeck qui répond dès qu'on l'appelle
- Yannou pour m'avoir divertie pendant que je bossais

Plus sérieusement :

- Maguy et Pete pour avoir passé du temps sur les différents schémas et scans
- Pete pour s'être passé d'ordinateur sans (trop) râler pendant quelques semaines
- Chris pour la relecture et la mise en forme

Mais encore :

- Le bar pour être encore ouvert à 2h
- Minet pour être disponible 24h/24

Et bien sûr :

- Les pougnes qui m'ont beaucoup inspiré
- Les profs qui ont finalement si peu d'imagination

On ne remercie pas :

- Le lecteur DVD de Pete qui m'a fait prendre du retard
- L'adm qui n'a même pas allégé mon emploi du temps
- Les imprimantes de la Maisel qui sont décidément incompréhensibles